详细解答

STEP II 1997，第 9 题

力学 · 摩擦力与刚体平衡

STEP II 1997，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

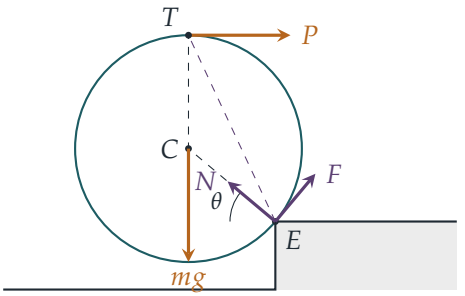
step.maths.org/questions/97-s2-q9

关键思路

由于球是被缓慢地拉上去的，它在每一瞬间都处于平衡（equilibrium）状态，所以在每个位置我们面对的都是一道静力学（statics）问题。球一旦离开地面，就只有三个力作用在它身上：重量、顶点处的拉力，以及台阶边缘的反作用力（reaction）。对边缘取力矩（moments），便可消去未知的反作用力，从而求出拉力。然后，三力定则（three-force rule，即三条作用线（lines of action）必须交于一点）确切地告诉我们反作用力指向哪个方向，而摩擦力（friction）的条件也就几乎唾手可得。

解答

设半径为 $r = \frac{1}{2}d$，则台阶的高度为 $\frac{1}{4}d = \frac{1}{2}r$。我们把球看成均匀的刚体（rigid body），它只在边缘 E 处与台阶接触（边缘是一条水平线，在通过球心的铅垂截面中是一个点）。设 C 为球心，T 为最高点，水平力 P 作用于该点，方向指向台阶。设 θ 为 EC 与水平线所成的角。



几何关系

以 E 为原点，C 比 E 高出 $r\sin\theta$，与它的水平距离为 $r\cos\theta$，而 T 则在 C 之上再高出 r。开始时，球静止在地面上，C 离地面的高度为 r，即比 E 高出 $\frac{1}{2}r$；因此 $\sin\theta = \frac{1}{2}$，$\theta = \frac{\pi}{6}$。当 C 位于 E 的正上方，即 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，球便完全登上台阶。所以整个运动过程对应于 θ 由 $\frac{\pi}{6}$ 增加至 $\frac{\pi}{2}$。

最大的力

当球仍然接触地面时，地面承担了部分重量，而地面只能向上推。当 P 刚好大得足以令地面的反作用力降至零时，球便开始上升。从这时起，作用于球的力是：在 T 处的 P、在 C 处的重量 mg，以及边缘在 E 处的反作用力，后者有沿 EC 方向的法向分量（normal component）N 和垂直于 EC 的摩擦力 F。

对 E 取力矩（反作用力对该点没有力矩），P 的力臂是 T 高出 E 的高度，即 $r(1+\sin\theta)$，而重量的力臂是 $r\cos\theta$。由平衡条件得

$$P\,r(1+\sin\theta) = mg\,r\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad P = \frac{mg\cos\theta}{1+\sin\theta}.$$

在 $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 上，分子递减而分母递增，所以 P 随 θ 递减。（在离地之前，P 只是逐渐增大至这个值。）因此最大值出现在 $\theta = \frac{\pi}{6}$，即球离开地面的一刻：

$$P_{\max} = \frac{mg\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{mg}{\sqrt{3}}.$$

摩擦力的条件

> **想一想** 边缘处的反作用力指向哪个方向?

三个互不平行的力若处于平衡，它们的作用线必定共点（concurrent）。P 的作用线是通过 T 的水平线，而重量的作用线是通过 C 的铅垂线，这条线同样通过 T。所以两者交于 T，而 E 处的总反作用力必定沿 ET 作用。

现在 $CE = CT = r$，所以三角形 CET 是等腰三角形。在 C 处，CT（铅垂向上）与 CE（向下，与水平线成 θ 角）之间的夹角是 $\frac{\pi}{2}+\theta$，所以每个底角是

$$\angle CET = \tfrac{1}{2}\left(\pi - \tfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\theta}{2}.$$

这就是总反作用力与法线 EC 之间的夹角，所以

$$\frac{F}{N} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right).$$

我们可以用分解（resolving）力的方法来验证这个结果。反作用力是 $(-P,\ mg)$，因为它要抵消 P 和重量。它沿单位法向量 $(-\cos\theta, \sin\theta)$ 和沿单位切向量 $(\sin\theta, \cos\theta)$ 的分量

分别是

$$N = P\cos\theta + mg\sin\theta = mg\,\frac{\cos^2\theta + \sin\theta + \sin^2\theta}{1+\sin\theta} = mg,$$
$$F = mg\cos\theta - P\sin\theta = mg\cos\theta\left(1 - \frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}\right) = \frac{mg\cos\theta}{1+\sin\theta},$$

所以 $F/N = \cos\theta/(1+\sin\theta)$,而根据半角公式(half-angle formulae),这等于 $\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2})$。在整个过程中 F 和 N 都是正数，所以边缘确实是在推着球，而摩擦力沿切线向上作用，正如图中所画。

只有当在每个位置都有 $F \le \mu N$ 时，球才不会在 E 处滑动，即

$$\mu \ge \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{对所有} \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

右边随 θ 增加而递减，所以要求最严格的位置同样是 $\theta = \frac{\pi}{6}$，这时它等于 $\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$。在那一瞬间，摩擦力必须至少是法向反作用力的 $1/\sqrt{3}$ 倍；若 $\mu = 1/\sqrt{3}$ 恰好成立，摩擦力便达到极限（limiting），球正处于即将滑动的状态，所以要安全地把球拉上去而不滑动，我们需要 $\mu > 1/\sqrt{3}$，这正是所要求的结果。

验算

- 当 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时，球心在边缘的正上方：$P = 0$ 而且 $F = 0$，理应如此。
- 整个过程中 $N = mg$，这是合理的：反作用力是 $(-P, mg)$，而它沿法线方向的分量算出来恰好是 mg。
- 以数值方法验算：让 θ 由 $\frac{\pi}{6}$ 逐步增加至 $\frac{\pi}{2}$，分别用取力矩和分解力的方法计算，P/mg 和 F/N 的最大值都是 $0.57735\ldots = 1/\sqrt{3}$，两者都出现在起始位置。

常见错误

- 把 P 对 E 的力臂当作 $r\sin\theta$（C 的高度），而不是 $r(1+\sin\theta)$（T 的高度）。
- 假设边缘处的反作用力纯粹沿法线方向。这是不可能的：法线通过 C，这样三个力便不能交于一点。

STEP 之外

三力的论证是一个普遍事实的特例：刚体处于平衡，当且仅当合力以及对任意一点的合力矩都等于零，而对于三个力的情况，这就迫使它们共点。反作用力与法线之间的夹角

（这里是 $\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$）就是“摩擦角”（angle of friction）的概念，它把摩擦力问题转化为几何问题。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）从这些原理出发，建立刚体的静力学和动力学。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。