详细解答

STEP II 1997，第 8 题

纯数学 · 以积分证明不等式

> **STEP II 1997，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q8

关键思路

每个形如 $(x^p-1)/p$ 的式子，其实都是乔装了的积分（integral）：它就是 $\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t$。因此，比较两个这样的式子，归根究底就是比较被积函数（integrand）t^{p-1} 与 t^{q-1}；只要留意到两者的大小关系在 $t=1$ 处对调，这个比较便很容易。至于最后的不等式（inequality），只需再积分一次，这次是对刚证明的不等式积分。

解答

对不等式积分

若在 $[a,b]$ 上有 $\mathrm{f}(t)\geq \mathrm{g}(t)$，则在该区间上 $\mathrm{f}-\mathrm{g}\geq 0$，所以 $\mathrm{f}-\mathrm{g}$ 的图像与 t-轴之间的区域位于轴上或轴的上方，其有向面积（signed area）为非负：

$$\int_a^b \mathrm{f}(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b \mathrm{g}(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b (\mathrm{f}(t)-\mathrm{g}(t))\,\mathrm{d}t\geq 0.$$

注意这里需要 $a\leq b$：若上下限的次序颠倒，两个积分之间的不等号便会反转。

$x\geq 1$ 的情况

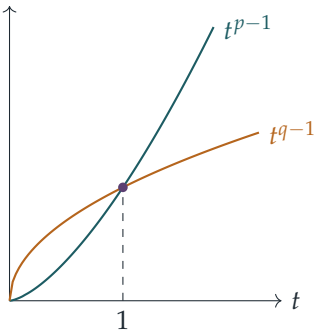
当 $t\geq 1$ 且 $p>q$ 时，有 $t^{p-1}=t^{q-1}\,t^{p-q}\geq t^{q-1}$，因为当 $t\geq 1$ 且 $p-q>0$ 时 $t^{p-q}\geq 1$。由于 $x\geq 1$，区间 $[1,x]$ 的上下限次序正确，所以由第一部分可得

$$\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t\ \geq\ \int_1^x t^{q-1}\,\mathrm{d}t.$$

因为 $p,q>0$，两个积分都可以直接计算：

$$\int_1^x t^{p-1}\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^p}{p}\right]_1^x=\frac{x^p-1}{p},\qquad \int_1^x t^{q-1}\,\mathrm{d}t=\frac{x^q-1}{q}.$$

因此对 $x \geq 1$ 有 $\dfrac{x^p-1}{p} \geq \dfrac{x^q-1}{q}$，正如所求。



这幅草图（以 $p = 2.5$、$q = 1.5$ 绘画）说明了要点：当 $t > 1$ 时，次数较高的幂较大；当 $0 < t < 1$ 时则较小。

$0 \leq x \leq 1$ 的情况

想一想 当 $0 < t < 1$ 时，t^{p-1} 与 t^{q-1} 之间的不等号方向相反。为甚么结论没有跟着反转?

两次反转互相抵消。当 $0 < t \leq 1$ 时，有 $t^{p-q} \leq 1$，所以 $t^{p-1} \leq t^{q-1}$。但现在 $x \leq 1$，所以次序正确的区间是 $[x, 1]$，而不是 $[1, x]$。

先考虑 $0 < x \leq 1$。在 $[x, 1]$ 上对 $t^{q-1} \geq t^{p-1}$ 积分（由于 $x > 0$，两者在该区间上都连续（continuous）），得

$$\int_x^1 t^{q-1}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_x^1 t^{p-1}\,\mathrm{d}t, \qquad \text{即} \qquad \frac{1-x^q}{q} \;\geq\; \frac{1-x^p}{p}.$$

两边乘以 -1，不等号反转，得 $\dfrac{x^p-1}{p} \geq \dfrac{x^q-1}{q}$。

当 $x = 0$ 时，我们直接验证：不等式变成 $-\frac{1}{p} \geq -\frac{1}{q}$，这是成立的，因为由 $p > q > 0$ 可得 $\frac{1}{p} < \frac{1}{q}$。（我们把 $x = 0$ 分开处理，是因为若 $q < 1$，则 t^{q-1} 在 0 附近无界（unbounded）。）所以不等式对所有 $0 \leq x \leq 1$ 成立；连同上一个情况，对每个 $x \geq 0$ 都成立。

最后的不等式

记 $\phi_p(t) = \dfrac{t^p-1}{p}$。我们已经证明：只要 $p > q > 0$，对每个 $t \geq 0$ 都有 $\phi_p(t) \geq \phi_q(t)$。两个函数在 $[0, \infty)$ 上都连续，所以当 $x > 0$ 时，我们可以在 $[0, x]$ 上对这个不等式积分：

$$\int_0^x \frac{t^p-1}{p}\,\mathrm{d}t \;\geq\; \int_0^x \frac{t^q-1}{q}\,\mathrm{d}t.$$

而

$$\int_0^x \frac{t^p-1}{p}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p}\Big(\frac{x^{p+1}}{p+1}-x\Big) = \frac{x}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1}-1\Big),$$

对 q 亦同样。所以

$$\frac{x}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1}-1\Big) \;\geq\; \frac{x}{q}\Big(\frac{x^q}{q+1}-1\Big),$$

两边除以 $x>0$（不等号方向不变），得

$$\frac{1}{p}\Big(\frac{x^p}{p+1}-1\Big) \;\geq\; \frac{1}{q}\Big(\frac{x^q}{q+1}-1\Big).$$

在 $x=0$ 处，这个不等式变成 $-\frac{1}{p}\geq -\frac{1}{q}$，我们已经知道它成立。至此，对所有 $x\geq 0$ 的证明完成。

验算

- 在 $x=1$ 处，中间的不等式是 $0\geq 0$：两条曲线在该处相交，与等号成立吻合。
- 在最后的不等式中取 $p=2$、$q=1$、$x=3$：左边是 $\frac{1}{2}(3-1)=1$，右边是 $\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}$，所以 $1\geq\frac{1}{2}$。
- 随机测试了 200,000 组满足 $0<q<p$ 及 $x\geq 0$ 的三元组 (p,q,x)，当中包括 $x=0$、$x=1$ 及极小的 x，两个不等式都找不到反例（counterexample）。

常见错误

- 当 $x<1$ 时在 $[1,x]$ 上积分，却保持不等号方向不变：对不等式积分之前，上下限必须按递增次序排列。
- 忘记端点 $x=0$，在该处 t^{q-1} 甚至可能没有定义。
- 试图用微积分从头证明最后一部分，而不是对刚建立的不等式积分。

STEP 之外

当 $q\to 0$ 时，$(x^q-1)/q\to\ln x$，所以这个结果表明：当 p 递减至 0 时，$(x^p-1)/p$ 递减至 $\ln x$。这是对数的一族精巧的界，也是统计学中 Box–Cox 变换（Box–Cox transformation）的基础。积分保持不等式这个原理（积分的单调性，monotonicity of the integral），是分析（analysis）课程中关于黎曼积分（Riemann integral）最先证明的定理之一。参见 Abbott, *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。