详细解答

STEP II 1997，第 7 题

纯数学 · 曲线描绘

STEP II 1997，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s2-q7

关键思路

右边只通过 x^2 依赖于 x，因此可把它看成 $u = x^2$ 的二次式，然后配方（complete the square）：这样一行就得出 y^2 的最大可能值，完全不需要微积分。至于作图，把 $x \to -x$ 或 $y \to -y$ 时方程不变，所以只需弄清楚第一象限的情况，再作反射即可。值得确定的地方有：曲线与两轴相交之处、在原点的斜率，以及曲线在原点以外与 x 轴相交之处的斜率。

解答

最大值与最小值

若 $a = 0$，方程变成 $y^2 = -x^4$，这迫使 $x = y = 0$：这条“曲线”只是单独一点 $(0,0)$，而 y 唯一的值是 0。以下设 $a \neq 0$。方程中只出现 a^2，所以不妨设 $a > 0$，到最后才写成 $|a|$。

由于 $y^2 \geq 0$，我们需要 $x^2(a^2 - x^2) \geq 0$，即 $x = 0$ 或 $x^2 \leq a^2$。所以曲线位于带状区域 $-|a| \leq x \leq |a|$ 之内。对 x^2 配方，

$$y^2 = a^2x^2 - x^4 = \frac{a^4}{4} - \left(x^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2 \leq \frac{a^4}{4},$$

等号成立当且仅当 $x^2 = \frac{1}{2}a^2$。因此在曲线上处处有 $|y| \leq \frac{1}{2}a^2$，而 $y = \frac{1}{2}a^2$ 和 $y = -\frac{1}{2}a^2$ 两个值都能取得，取于 $x = \pm|a|/\sqrt{2}$。所以

$$\boxed{y_{\max} = \frac{a^2}{2}, \qquad y_{\min} = -\frac{a^2}{2}, \qquad \text{两者皆取于} x = \pm\frac{|a|}{\sqrt{2}}.}$$

想一想 这与微积分的结果是否吻合？$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 0$ 在哪里成立？

作隐函数求导（implicit differentiation），$2y\,\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2a^2x - 4x^3 = 2x(a^2 - 2x^2)$。在 $y \neq 0$ 之处，斜率为零当且仅当 $x^2 = \frac{1}{2}a^2$（根 $x = 0$ 对应 $y = 0$），这正是上面找到的四个点。$y = 0$ 的点需要另行小心处理，因为在那里不能除以 y；我们接着就处理它们。两种方法结果一致，但配方能即时证明这些驻值（stationary values）就是整体的最大值和最小值。

曲线的形状

取 $a > 0$。解出 y 得到两个分支，

$$y = x\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{及} \qquad y = -x\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad -a \leq x \leq a,$$

两者互为对 x 轴的反射。在第一个分支上，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

- **在原点**，斜率是 a，而在另一个分支上则是 $-a$。所以曲线两次经过原点，并在那里与自身相交，切线为 $y = \pm ax$。
- **在** $x = \pm a$，我们有 $y = 0$，而当 $x \to a^-$ 时斜率趋向 $-\infty$。所以曲线在 $(\pm a, 0)$ 与 x 轴相交，切线是铅垂的；曲线在那里平滑而圆浑，并非尖角。
- **在两者之间**，第一个分支由 $(0,0)$ 上升至 $x = a/\sqrt{2}$ 处的最大值 $\frac{1}{2}a^2$，再下降回到 $(a, 0)$。其余象限的情况可由对两轴的对称性得出。

结果是一个横卧的 8 字形，在 $x \geq 0$ 和 $x \leq 0$ 各有一个环，阔度为 $2|a|$，总高度为 a^2。

要一次过看清整条曲线，有一个简洁的方法：设 $x = a\sin t$。那么 $a^2 - x^2 = a^2\cos^2 t$，所以 $y^2 = a^4\sin^2 t\cos^2 t$，而曲线可由

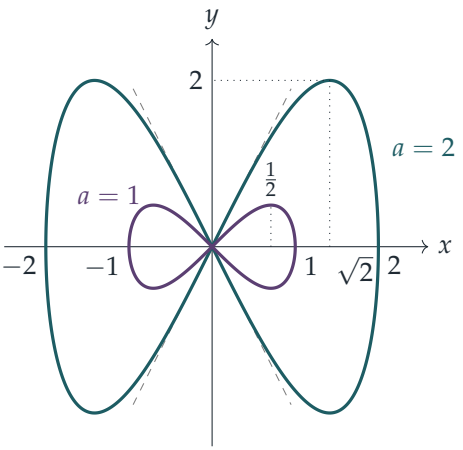
$$x = a\sin t, \qquad y = \tfrac{1}{2}a^2\sin 2t, \qquad 0 \leq t < 2\pi,$$

描出，这再次显示 $|y| \leq \frac{1}{2}a^2$。

$a = 1$ 与 $a = 2$ 的情况

	与 x 轴相交于	在 O 的切线	极值点
$a = 1$	$x = 0,\ \pm 1$	$y = \pm x$	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{2}\right)$
$a = 2$	$x = 0,\ \pm 2$	$y = \pm 2x$	$\left(\pm\sqrt{2}, \pm 2\right)$

要确定两条曲线的相对位置：对于 $0 < |x| \leq 1$，我们有 $x^2(1 - x^2) < x^2(4 - x^2)$，所以 $a = 1$ 的曲线严格位于 $a = 2$ 的曲线之内，唯一的公共点是原点。例如，在 $x = 1$ 处，$a = 1$ 的曲线位于 $y = 0$，而 $a = 2$ 的曲线则位于 $y = \pm\sqrt{3}$。



虚线是 $a = 2$ 时的切线 $y = \pm 2x$；当 $a = 1$ 时，在原点的切线是 $y = \pm x$，倾角为 $45°$。

验算

- 对 50 个随机的 a 值，在 $|x| \le |a|$ 上作网格搜索，每次找到的最大 $|y|$ 都是 $\frac{1}{2}a^2$，位于 $|x| = |a|/\sqrt{2} \approx 0.7071|a|$。当 $a = 2$ 时，结果是 $y_{\max} = 2.000000$，位于 $|x| \approx 1.41421$。
- 最大值按 a^2 的比例变化，这是必然的：把 (x, y) 换成 (ax, a^2y)，就把 $a = 1$ 的曲线变成一般的曲线。所以 $a = 2$ 的曲线就是把 $a = 1$ 的曲线沿水平方向拉伸 2 倍、沿铅垂方向拉伸 4 倍而成，这就是它高出那么多的原因。

常见错误

- 只画出 $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$。方程定义的是 y^2，所以 y 的正负两个值都属于图像，得出的是两个环，而不是 S 形。
- 在 $(\pm a, 0)$ 画出尖角。那里的斜率是无限大，所以曲线是铅垂而平滑地穿过 x 轴的。
- 忘记曲线在原点与自身相交，斜率为 $\pm a$。正是这些斜率让我们在 O 附近分辨出两条曲线。

STEP 之外

这里的原点是一个结点（node），即代数曲线（algebraic curve）与自身相交的点：在 O 附近，方程看起来就像 $y^2 \approx a^2x^2$，即一对直线 $y = \pm ax$。像这样按最低次项把奇点（singular point）分类，是研究代数曲线的第一步。$x = a\sin t$ 这个技巧显示这条曲线可以用三角函数参数化（parametrise）；这类曲线称为利萨茹图形（Lissajous figures）（这

里的频率比为 1：2）。若想多练习描绘这类曲线，以及更广泛地练习 STEP 的思考方式，可阅读 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。