详细解答

STEP II 1997，第 6 题

纯数学 · 三角方程

STEP II 1997，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s2-q6

关键思路

把所有式子都用 $t = \tan\theta$ 表示。三倍角公式（triple-angle formula）把方程化为 t 的三次方程（cubic），而一旦看出一个容易的根，余下的二次方程正好就是第一部分的那一个，因此它的根可以用一个二倍角（double-angle）条件来处理，而不必计算 $\tan^{-1}(1\pm\sqrt{2})$。余切（cotangent）方程其实是同一个方程的变相：代换（substitution）$\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$ 把 cot 换成 tan。

解答

开首的结果

设 $t = \tan\phi$，其中 $t^2 = 2t + 1$。那么 $1 - t^2 = -2t$。此外 $t \neq 0$，因为 $t = 0$ 不满足 $t^2 = 2t + 1$；而且 $t^2 \neq 1$（否则 $2t = 0$）。所以 $\tan 2\phi$ 有定义，并且

$$\tan 2\phi = \frac{2t}{1 - t^2} = \frac{2t}{-2t} = -1,$$

这正是所要证明的。

逆命题（converse）同样成立，而我们稍后会用到它。若 $\tan 2\phi = -1$，则 $2t = -(1 - t^2)$，即 $t^2 = 2t + 1$。所以

$$\tan^2\phi = 2\tan\phi + 1 \iff \tan 2\phi = -1.$$

方程 $\tan\theta = 2 + \tan 3\theta$

要成为解，$\tan\theta$ 和 $\tan 3\theta$ 都必须有定义。设 $t = \tan\theta$。那么

$$\tan 3\theta = \frac{3t - t^3}{1 - 3t^2},$$

而且因为 $\tan 3\theta$ 有定义，所以 $1 - 3t^2 \neq 0$。因此

$$\tan\theta - \tan 3\theta = \frac{t(1 - 3t^2) - (3t - t^3)}{1 - 3t^2} = \frac{-2t - 2t^3}{1 - 3t^2}.$$

令上式等于 2，并把两边乘以 $1 - 3t^2$（它不等于零），得

$$-t - t^3 = 1 - 3t^2 \quad \Longleftrightarrow \quad t^3 - 3t^2 + t + 1 = 0.$$

各项系数之和为零，所以 $t = 1$ 是一个根，并且

$$t^3 - 3t^2 + t + 1 = (t - 1)(t^2 - 2t - 1).$$

$t = 1$ 和 $t = 1 \pm \sqrt{2}$ 都不满足 $3t^2 = 1$，所以每一个根都给出真正的解。

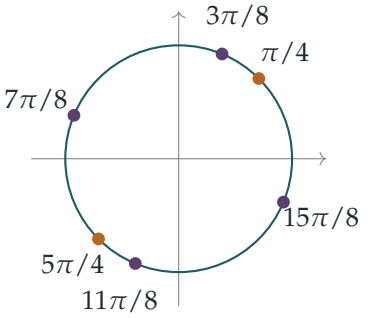
想一想 怎样把 $\tan\theta = 1 \pm \sqrt{2}$ 化为 π 的有理数倍?

我们利用第一部分。$t^2 - 2t - 1 = 0$ 的根正好就是满足 $t^2 = 2t + 1$ 的 $\tan\theta$ 的值，而根据上面的等价关系（equivalence），这些正好就是满足 $\tan 2\theta = -1$ 的 θ。

- $\tan\theta = 1$：$\theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$。在 $(0, 2\pi)$ 内，这给出 $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$。
- $\tan 2\theta = -1$：$2\theta = \frac{3\pi}{4} + n\pi$，所以 $\theta = \frac{3\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}$。这里 2θ 的取值范围是 $(0, 4\pi)$，所以 $n = 0, 1, 2, 3$，而 $\theta = \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$。

（例如 $\tan\frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$，而 $\tan\frac{7\pi}{8} = -\tan\frac{\pi}{8} = 1 - \sqrt{2}$。）所以在 $0 < \theta < 2\pi$ 内的解是

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}.$$



琥珀色的点来自 $\tan\theta = 1$；梅紫色的点彼此相隔四分之一圈，来自 $\tan 2\theta = -1$。

方程 $\cot\theta = 2 + \cot 3\theta$

> **想一想** 我们是否要用 cot 把整个计算重做一遍?

不必。设 $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$。那么 $\cot\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \tan\psi$。此外

$$\cot 3\theta = \cot\left(\frac{3\pi}{2} - 3\psi\right) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - 3\psi\right) = \tan 3\psi,$$

这里用到 cot 的周期（period）为 π 这个事实。每一边有定义，当且仅当对应的 tan 有定义。所以方程变成

$$\tan\psi = 2 + \tan 3\psi,$$

这就是前一个方程。范围 $-\frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 变成 $0 < \psi < 2\pi$，正好就是前面的范围。所以 ψ 取上面求得的六个值，而由 $\theta = \frac{\pi}{2} - \psi$ 得

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8}, -\frac{3\pi}{8}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{7\pi}{8}, -\frac{11\pi}{8}.$$

验算

- 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$：$\tan 3\theta = \tan\frac{3\pi}{4} = -1$，而 $2 + (-1) = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$。当 $\theta = \frac{3\pi}{8}$：$\tan\frac{9\pi}{8} = \tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$，而 $2 + \sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2} = \tan\frac{3\pi}{8}$。
- t 的三次方程最多有三个根，而 tan 的周期为 π，所以在长度为 2π 的区间内，我们预期最多有 $3 \times 2 = 6$ 个解。我们找到了六个。
- 以数值方法，在 $(0, 2\pi)$ 上用细密的格点扫描 $\tan x - \tan 3x - 2$，发现（在远离极点（pole）之处）只在 $x = \frac{2\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}, \frac{10\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}$ 出现变号。对余切方程作同样的扫描，找到的正好就是上面列出的六个值。

常见错误

- 在 $\tan 2\theta = -1$ 这一步只取 $n = 0, 1$ 就停下来。由于 θ 的取值范围是 $(0, 2\pi)$，2θ 的取值范围就是 $(0, 4\pi)$，这样会得到四个解，而不是两个。
- 未经检查就除以某个式子，因而漏掉根 $t = 1$；或者忘记了 $\frac{5\pi}{4}$。
- 在最后一部分从头解起,并把范围弄错。这个代换把题目所给的区间恰好映射到 $(0, 2\pi)$ 上，而这绝非巧合。

STEP 之外

恒等式（identity）$\tan 3\theta = (3t - t^3)/(1 - 3t^2)$ 其实就是 $(1 + \mathrm{i}t)^3$ 的实部与虚部；一般而言，$\tan n\theta$ 是 $\tan\theta$ 的两个多项式之比，可以从 $(1 + \mathrm{i}t)^n$ 直接读出。这些多项式的根是 π 的有理数倍的正切值，这就是为甚么它们的因式分解（factorisation），例如这里的 $t^2 - 2t - 1$，会如此整齐。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）展示了倍角公式（multiple-angle formulae）如何从复数乘法的几何中自然得出。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。