详细解答

STEP II 1997，第 5 题

纯数学 · 复指数映射

STEP II 1997，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s2-q5

本题在 *Beyond STEP* 第 5.7 节作为映射的复指数函数中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch05/complex-exponential.html

关键思路

这个关系式其实就是 $z = \mathrm{e}^{u}\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^{w}$，只不过写成了模—辐角形式（modulus–argument form）：u 决定 z 的模（modulus），v 决定它的辐角（argument）。一旦看出这一点，每一部分其实都是极坐标（polar coordinates）的问题。唯一要留神的是，辐角只能确定到相差 2π 的整数倍，所以这个映射是多对一（many-to-one）的；要得到一一对应（one-to-one correspondence），就必须把 u–v 平面裁成一条高度恰当的水平带状区域，并且小心决定哪些边界要包括在内。

解答

当 $z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}$ 时求 w

由于 $\mathrm{e}^{u} > 0$ 而 $|\cos v + \mathrm{i}\sin v| = 1$，这个关系式表示

$$|z| = \mathrm{e}^{u}, \qquad \arg z = v \pmod{2\pi}.$$

当 $z = \mathrm{i}\,\mathrm{e}$ 时，$|z| = \mathrm{e}$ 而 $\arg z = \frac{\pi}{2}$。所以 $\mathrm{e}^{u} = \mathrm{e}$，得 $u = 1$（实指数函数是一对一的）；又 $\cos v + \mathrm{i}\sin v = \mathrm{i}$，所以 $\cos v = 0$ 且 $\sin v = 1$，得 $v = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$。因此

$$w = 1 + \mathrm{i}\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

这样的 w 有无穷多个，它们在垂直线 $u = 1$ 上每隔 2π 出现一个。

直线 $u =$ 常数 的像

在直线 $u = c$ 上，点 z 的模是 e^c，辐角是 v。当 v 取遍所有实数时，$\cos v + \mathrm{i}\sin v$ 会绕单位圆走（无穷多圈），所以 z 描出的轨迹是

$$\text{圆} x^2 + y^2 = \mathrm{e}^{2c}, \quad \text{圆心} O, \text{ 半径} \mathrm{e}^c.$$

c 愈大，圆就愈大；$c = 0$ 给出单位圆；当 $c \to -\infty$ 时，这些圆向 O 收缩，但永远不会到达该点，因为 $\mathrm{e}^c > 0$。

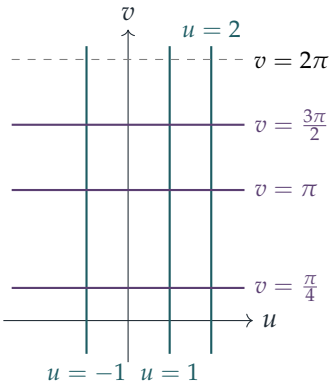
直线 $v =$ 常数 的像

在直线 $v = c$ 上，我们有 $z = \mathrm{e}^u(\cos c + \mathrm{i}\sin c)$，即固定的单位向量 $(\cos c, \sin c)$ 的正数倍。当 u 取遍 $\mathbb{R}$ 时，倍数 e^u 取 $(0, \infty)$ 中的每一个值恰好一次。所以它的像是

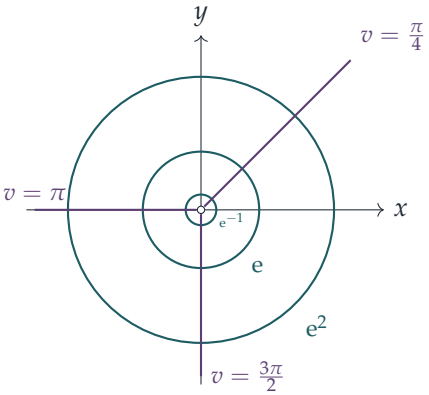
$$\text{由} O \text{ 出发、以角度} c \text{ 与正} x \text{ 轴相夹的半直线（half-line），但不包括} O \text{ 本身。}$$

直线 $v = c$ 与 $v = c + 2k\pi$ 给出同一条半直线。举例说，用直角坐标表示时，$v = \frac{\pi}{4}$ 给出 $y = x$ 中 $x > 0$ 的部分，而 $v = \pi$ 给出负 x 轴。

下图显示 u–v 平面上由直线组成的网格及其像：垂直线变成圆，水平线变成射线。



u–v 平面



x–y 平面

（图中的圆并非按比例绘画：半径 e^{-1}、e、e^2 增长得非常快。空心圆圈标示 O，这一点永远不会到达。）

与第一象限一一对应的子集

点 z 位于开的第一象限（first quadrant），当且仅当 $z \neq 0$ 而且它有一个严格介乎 0 与 $\frac{\pi}{2}$ 之间的辐角。取

$$W_1 = \left\{(u, v) : u \in \mathbb{R},\ 0 < v < \tfrac{\pi}{2}\right\}, \qquad W_2 = \left\{(u, v) : u \in \mathbb{R},\ 2\pi < v < \tfrac{5\pi}{2}\right\}.$$

W_1 的每一点都映射到第一象限内，因为在那里 $e^u\cos v > 0$ 且 $e^u \sin v > 0$。反过来，对第一象限的一点 z，等式 $z = e^u(\cos v + i\sin v)$ 成立当且仅当 $u = \ln|z|$ 且 $v = \theta + 2k\pi$，其中 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 是它的主辐角（principal argument）。这些值之中恰好只有一个，即 $k = 0$ 的那个，落在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内，所以 z 在 W_1 中恰有一个原像（preimage）。因此 W_1 与该象限一一对应。取 $k = 1$ 作同样的论证，便适用于 W_2，它就是 W_1 向上平移 2π 而成。

（任何带状区域 $\{2k\pi < v < 2k\pi + \frac{\pi}{2}\}$ 都同样可行。）

与 $0 < |z| < 1$ 一一对应的子集

现在我们需要 $|z| = e^u < 1$，即 $u < 0$，而且每一个辐角都必须恰好取到一次，所以 v 必须取遍一个长度恰好是 2π 的区间。

> **想一想** 这条带状区域应该包括上边界、下边界、两者都包括，还是两者都不包括？

恰好包括其中一条。假如两条都包括，例如 $0 \le v \le 2\pi$，那么 $(u, 0)$ 和 $(u, 2\pi)$ 都会映射到正实轴上的同一点 e^u，这个对应就不是一对一的了。假如两条都不包括，正实轴就完全取不到。只包括一条边界，才能令每个辐角恰好出现一次。所以取

$$W_3 = \{(u,v) : u < 0,\ 0 \le v < 2\pi\}, \qquad W_4 = \{(u,v) : u < 0,\ -\pi < v \le \pi\}.$$

对于 W_3：若 $0 < |z| < 1$，则必然有 $u = \ln|z| < 0$，而在 z 的各个辐角 $\theta + 2k\pi$ 之中，恰好有一个落在 $[0, 2\pi)$ 内，因为这个区间的长度是 2π，而且只包含它的一个端点。所以每一个这样的 z 在 W_3 中恰有一个原像，而 W_3 的每一点都映射到一个满足 $0 < e^u < 1$ 的 z。对于 W_4，把区间换成 $(-\pi, \pi]$，同样的论证依然成立，这个区间对应的正是主辐角。两者都是把半平面 $u < 0$ 裁成高度为 2π 的半开带状区域。

验算

- 代入 $u = 1$、$v = \frac{\pi}{2} + 2\pi$：$z = e(\cos\frac{5\pi}{2} + i\sin\frac{5\pi}{2}) = ie$，符合要求。
- 数值上，我们对数以千计的随机 (u, v) 作检验，发现 $|z| = e^u$ 及 $\arg z \equiv v$ 的误差都在 10^{-9} 之内。对每个目标集合中的随机点，我们发现它在 $W_1, \ldots, W_4$ 中相应的集合内都恰有一个原像。此外，点 $(-1, 0)$ 和 $(-1, 2\pi)$ 都给出 $z = e^{-1} \approx 0.3679$，这证实了闭的带状区域会造成重复计算。

常见错误

- 只写出 $w = 1 + \frac{\pi}{2}i$，忘记了 $+2k\pi$。

- 把原计数进像之中：e^u 永远不等于 0，所以那些圆永远不会缩成一点，而那些射线的起点是不包括在内的。
- 为 W_3 选用闭的带状区域 $0 \leq v \leq 2\pi$（或开的带状区域 $0 < v < 2\pi$）：前者把正实轴重复计算，后者则漏掉了它。

STEP 之外

这里的映射就是复指数函数（complex exponential）$w \mapsto e^w$。它把直角坐标的网格线变成极坐标的网格线，而且是周期函数，周期为 $2\pi i$。选择一条令它成为一对一的带状区域，正正就是为它的反函数选择一个复对数的分支（*branch of the complex logarithm*）。你舍去的那条边界就是分支切割（*branch cut*），这解释了为甚么 $\log z$ 不能在整个 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 上连续地定义。Tristan Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以图像阐释复分析的著作）对这个映射以及一般的保角映射（conformal maps）都有十分精美的图示。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。