详细解答

STEP II 1997，第 4 题

纯数学 · 余式定理

> **STEP II 1997，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q4

关键思路

以一个次数（degree）为 d 的多项式作除式，所得余式（remainder）的次数必小于 d，而且恒等式（identity）被除式 = 除式 × 商式 + 余式 对每一个 x 都成立。因此，我们代入令除式变为零的 x 值：商式（quotient）那一项随即消失，只剩下余式。整道题目用的就是这一招，前后共用了三次。

解答

余式定理（remainder theorem）

把 $\mathrm{p}(x)$ 除以一次多项式 $x-a$，得到商式 $\mathrm{s}(x)$ 和余式 R，而余式的次数小于 1，所以 R 是常数：

$$\mathrm{p}(x) = (x-a)\,\mathrm{s}(x) + R \qquad \text{对所有} x.$$

由于这是关于 x 的恒等式，我们可以代入 $x=a$。右边第一项变成 $0\cdot \mathrm{s}(a)=0$，于是剩下 $\mathrm{p}(a)=R$。所以余式就是 $\mathrm{p}(a)$，正如所求。

第 (i) 部分

根据余式定理，题目给出的余式表示

$$\mathrm{p}(1)=3, \qquad \mathrm{p}(2)=1, \qquad \mathrm{p}(3)=5.$$

把 $x=1,2,3$ 代入 $\mathrm{p}(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\mathrm{q}(x)+\mathrm{r}(x)$，每次第一项都会变成零，所以

$$\mathrm{r}(1)=3, \qquad \mathrm{r}(2)=1, \qquad \mathrm{r}(3)=5.$$

想一想 我们对 $\mathrm{q}(x)$ 一无所知。这会构成问题吗?

不会：当 $x = 1, 2, 3$ 时，因式 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 等于零，所以无论 q 是甚么，它都没有任何贡献。三个函数值足以确定 r，因为它最多只有三个系数。

次数不超过二的多项式，可以方便地写成

$$\mathrm{r}(x) = A(x-1)(x-2) + B(x-1) + C,$$

因为这样每次代入都会逐一消去某些项：

$$\begin{aligned} x = 1: &\quad C = 3, \\ x = 2: &\quad B + C = 1 \;\Rightarrow\; B = -2, \\ x = 3: &\quad 2A + 2B + C = 5 \;\Rightarrow\; 2A - 4 + 3 = 5 \;\Rightarrow\; A = 3. \end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{r}(x) = 3(x-1)(x-2) - 2(x-1) + 3 = 3x^2 - 11x + 11.$$

验算：$\mathrm{r}(1) = 3 - 11 + 11 = 3$，$\mathrm{r}(2) = 12 - 22 + 11 = 1$，$\mathrm{r}(3) = 27 - 33 + 11 = 5$。

第 (ii) 部分

（题目有一处写作 $\mathrm{P}_n(x)$；它指的是同一个多项式 $\mathrm{P}(x)$。）根据余式定理，我们需要

$$\mathrm{P}(a) = a \qquad \text{其中} a = 0, 1, \ldots, n.$$

多项式 x 本身已经符合这个要求，但它的次数不对。所以我们改为考虑 $\mathrm{D}(x) = \mathrm{P}(x) - x$：我们需要 $\mathrm{D}(a) = 0$ 对 $a = 0, 1, \ldots, n$ 成立，于是根据因式定理（factor theorem，即余式为 0 时的余式定理），$x, x-1, \ldots, x-n$ 各自都整除 $\mathrm{D}(x)$。这 $n+1$ 个一次因式互不相同，所以它们的乘积整除 $\mathrm{D}(x)$，而这个乘积的次数是 $n+1$。

想一想 怎样才能令 $\mathrm{P}(x)$ 的次数刚好是 $n+1$?

取 $\mathrm{D}(x)$ 为该乘积本身（喜欢的话也可以乘上一个非零常数）。加上 x 不可能抵销它的首项（leading term）x^{n+1}，因为 $n+1 \geq 2$。所以

$$\mathrm{P}(x) = x + x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

的次数是 $n+1$，并且 $\mathrm{P}(a) = a + 0 = a$ 对每个满足 $0 \leq a \leq n$ 的整数 a 都成立。这就是一个符合要求的多项式。

事实上，这个论证找出了所有这样的多项式：如果 P 的次数是 $n+1$，并且有题目所述的余式，那么 $\mathrm{D}(x) = \mathrm{P}(x) - x$ 的次数最多是 $n+1$，又能被那个次数为 $n+1$ 的乘积整除，

所以 $\mathrm{D}(x) = k\,x(x-1)\cdots(x-n)$，其中 k 是常数，而且必须有 $k \neq 0$，次数才会是 $n+1$。一般的答案是

$$\mathrm{P}(x) = x + k\,x(x-1)(x-2)\cdots(x-n), \qquad k \neq 0.$$

验算

- 当 $n = 1$ 时，$\mathrm{P}(x) = x + x(x-1) = x^2$：除以 x 余 0，除以 $x-1$ 余 1，符合要求。
- 在 (i) 中，任取一个 q，例如 $\mathrm{q}(x) = x$，构作出 p，再用综合除法（synthetic division）分别除以 $x-1$、$x-2$、$x-3$：所得余式正是 $3, 1, 5$。
- 我们用电脑验证了以下各项：以 1000 个随机多项式检验余式定理；第 (i) 部分取 100 个随机选择的 q；第 (ii) 部分取 $n = 1, \ldots, 11$ 及 $k = 1, -3, 7$。每一个余式都完全吻合。

常见错误

- 在第 (ii) 部分，忘记了多项式 $\mathrm{P}(x) = x$ 本身虽然满足各项条件，但次数是 1 而不是 $n+1$；正是那个乘积项把次数修正过来。
- 就 $ax^2 + bx + c$ 的系数解三条联立方程并无不妥，只是较慢；采用嵌套形式 $A(x-1)(x-2) + B(x-1) + C$ 则可免去消元的步骤。

STEP 之外

第 (i) 部分是多项式插值（polynomial interpolation）的一个例子：通过任意 m 个 x 坐标互不相同的点，恰好有一个次数小于 m 的多项式，而我们所用的嵌套形式就是它的牛顿（Newton）形式。同样的推理，用环（ring）的语言来说，就是多项式的中国余数定理（Chinese remainder theorem）：知道一个多项式模 $x-1$、$x-2$ 和 $x-3$ 的结果，等同于知道它模这三者乘积的结果。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）详细讲述了多项式环和这个定理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。