详细解答

STEP II 1997，第 3 题

纯数学 · 部分分式积分法

STEP II 1997，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s2-q3

关键思路

分母中的两个二次式相乘得 x^4+4。这是经典的“乔装了的平方差”（difference of two squares）：$x^4+4=(x^2+2)^2-(2x)^2$。一旦求得部分分式（partial fractions），每一项都是标准积分。我们把每个分子拆成两部分：一部分是其分母的导数（derivative）的倍数，积分后得对数（logarithm）；另一部分是常数，配方（completing the square）后得反正切（arctangent）。

解答

部分分式

首先留意

$$(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=(x^2+2)^2-(2x)^2=x^4+4x^2+4-4x^2=x^4+4.$$

因此，把所求的恒等式两边同乘 x^4+4，我们需要

$$(ax+b)(x^2-2x+2)+(cx+d)(x^2+2x+2)=1 \quad \text{对所有}x.$$

展开左方得

$$(a+c)x^3+(b-2a+d+2c)x^2+(2a-2b+2c+2d)x+(2b+2d).$$

与常数多项式 1 比较系数（comparing coefficients）：

$$\begin{aligned} x^3: &\quad a+c=0,\\ x^2: &\quad b+d-2a+2c=0,\\ x^1: &\quad 2(a+c)+2(d-b)=0,\\ x^0: &\quad 2(b+d)=1. \end{aligned}$$

由第一及第三条方程得 $c=-a$ 及 $d=b$。再由第四条方程得 $b=d=\frac{1}{4}$。最后，第二条方程变成 $\frac{1}{2}-4a=0$，所以 $a=\frac{1}{8}$。因此

$$a=\tfrac{1}{8}, \qquad b=\tfrac{1}{4}, \qquad c=-\tfrac{1}{8}, \qquad d=\tfrac{1}{4},$$

即

$$\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{8}\left(\frac{x+2}{x^2+2x+2}+\frac{2-x}{x^2-2x+2}\right).$$

（其实我们毋须任何代数运算，也可预料 $c=-a$ 及 $d=b$。以 $-x$ 代替 x，$\frac{1}{x^4+4}$ 保持不变，而两个分母则互相对调。）

积分

想一想 我们怎样求 $\dfrac{x+2}{x^2+2x+2}$ 的积分？

分母的导数是 $2x+2$。于是我们把分子写成 $2x+2$ 的倍数，再加上余下的部分：

$$x+2=\tfrac{1}{2}(2x+2)+1, \qquad 2-x=-\tfrac{1}{2}(2x-2)+1.$$

配方得 $x^2\pm 2x+2=(x\pm 1)^2+1$。因此

$$\frac{1}{x^4+4}=\frac{1}{16}\cdot\frac{2x+2}{x^2+2x+2}-\frac{1}{16}\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x+1)^2+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x-1)^2+1}.$$

两个二次式对所有实数 x 均为正数，所以每一项在 $[0,1]$ 上都是连续的。首两项的形式为 f'/f，其中 $f>0$，积分后得 $\ln f$。最后两项积分后得反正切。所以

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^4+4} &= \frac{1}{16}\Big[\ln(x^2+2x+2)-\ln(x^2-2x+2)\Big]_0^1+\frac{1}{8}\Big[\tan^{-1}(x+1)+\tan^{-1}(x-1)\Big]_0^1\\ &= \frac{1}{16}[(\ln 5-\ln 1)-(\ln 2-\ln 2)]\\ &\quad+\frac{1}{8}[(\tan^{-1}2+\tan^{-1}0)-(\tan^{-1}1+\tan^{-1}(-1))]\\ &= \frac{1}{16}\ln 5+\frac{1}{8}[\tan^{-1}2-(\tfrac{\pi}{4}-\tfrac{\pi}{4})]\\ &= \frac{1}{16}\ln 5+\frac{1}{8}\tan^{-1}2, \end{aligned}$$

正如所求。各个 $\ln 2$ 项和各个 $\frac{\pi}{4}$ 项都成对抵消，这正是上文留意到的对称性所带来的美妙结果。

验算

- 当 $x = 0$ 时，部分分式给出 $\frac{1}{8}\left(\frac{2}{2} + \frac{2}{2}\right) = \frac{1}{4} = \frac{1}{0+4}$。当 $x = 1$ 时，则给出 $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{5} + \frac{1}{1}\right) = \frac{1}{5}$，同样正确。
- 被积函数（integrand）在 $[0, 1]$ 上由 $\frac{1}{4}$ 递减至 $\frac{1}{5}$，所以积分值必定介乎 0.2 与 0.25 之间。以数值计算，$\frac{1}{16}\ln 5 + \frac{1}{8}\tan^{-1} 2 \approx 0.100589 + 0.138394 = 0.238983$。对该积分使用辛普森法则（Simpson's rule）得 0.2389834593，两者吻合至约 16 位有效数字。

常见错误

- 试图寻找实根，借此在实数范围内把 $x^4 + 4$ 因式分解（factorise）。它并没有实根，所以因式必定是二次式。窍门在于加上再减去 $4x^2$ 来配方。
- 忘记反正切项的下限。$\tan^{-1}(0+1) = \frac{\pi}{4}$ 与 $\tan^{-1}(0-1) = -\frac{\pi}{4}$ 必须两者都计算在内，才会互相抵消。

STEP 之外

因式分解 $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$ 是热尔曼（Sophie Germain）恒等式 $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$ 的特例。举例说，它说明了 $n^4 + 4$ 只有在 $n = 1$ 时才是质数。更一般而言，每个实系数多项式都可分解成实系数的一次因式和二次因式，因为复数根总是以共轭对（conjugate pairs）的形式出现。所以，只要懂得部分分式，从而懂得对数和反正切，便足以求出任何有理函数（rational function）的积分。利用围道积分（contour integration），你几乎毋须计算便可求得 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^4+4} = \frac{\pi}{4}$；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）解释了个中原因。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。