详细解答

STEP II 1997，第 2 题

纯数学 · 递推关系

STEP II 1997，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s2-q2

关键思路

这一串等式其实是乔装了的递推关系（recurrence）：每一环都在说 $x_n + 2/x_{n+1} = 3$，所以每一项都决定了下一项。先把头几项以分数形式算出来，再仔细观察分子和分母。2 的幂很快就会出现；一旦有了猜想，递推关系正好提供归纳法（induction）所需的那一步。

解答

找出规律

把这串等式逐个读出来，得

$$\frac{2}{x_1} = 3 \qquad \text{及} \qquad x_n + \frac{2}{x_{n+1}} = 3 \quad (n \geq 1),$$

因此

$$x_1 = \frac{2}{3}, \qquad x_{n+1} = \frac{2}{3 - x_n}.$$

（这个递推关系只在 $x_n \neq 3$ 时才有意义；我们稍后会看到，每个 x_n 都介乎 0 与 1 之间。）算出头几项：

$$x_1 = \frac{2}{3}, \qquad x_2 = \frac{2}{3 - \frac{2}{3}} = \frac{6}{7}, \qquad x_3 = \frac{2}{3 - \frac{6}{7}} = \frac{14}{15}, \qquad x_4 = \frac{2}{3 - \frac{14}{15}} = \frac{30}{31}.$$

分母 $3, 7, 15, 31$ 各自都比 2 的某个幂少一，即 $2^{n+1} - 1$，而每个分子又比它的分母少一。于是我们猜想

$$x_n = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1} - 1}.$$

以归纳法证明

设 $P(n)$ 为命题 $x_n = \dfrac{2^{n+1}-2}{2^{n+1}-1}$。

基础情况（base case）。当 $n=1$ 时，公式给出 $\frac{4-2}{4-1} = \frac{2}{3} = x_1$，所以 $P(1)$ 成立。

归纳步骤（inductive step）。假设对某个 $k \geq 1$，$P(k)$ 成立。为了令代数运算整洁一些，记 $N = 2^{k+1}$，于是 $x_k = \dfrac{N-2}{N-1}$。那么

$$3 - x_k = \frac{3(N-1)-(N-2)}{N-1} = \frac{2N-1}{N-1},$$

它不等于零（事实上它大于 2，因为 $x_k < 1$），所以我们可以除以它：

$$x_{k+1} = \frac{2}{3-x_k} = \frac{2(N-1)}{2N-1} = \frac{2N-2}{2N-1}.$$

> ? **想一想** 为甚么这就是 $n = k+1$ 时的公式?

因为 $2N = 2^{k+2} = 2^{(k+1)+1}$。所以

$$x_{k+1} = \frac{2^{(k+1)+1}-2}{2^{(k+1)+1}-1},$$

这正是 $P(k+1)$。

由于 $P(1)$ 成立，而且对每个 $k \geq 1$ 都有 $P(k) \Rightarrow P(k+1)$，根据归纳法，$P(n)$ 对所有 $n \geq 1$ 都成立。这同时确认了对每个 n 都有 $0 < x_n < 1$，所以分母 $3 - x_n$ 永远不会是零。

“其他方法”：线性化

这个猜想其实也可以推导出来。对于形如 $x_{n+1} = 2/(3-x_n)$ 的递推关系，只要引入一个各项均非零的新数列 (a_n)，并写成 $x_n = 2a_n/a_{n+1}$，它就会变成线性（linear）的。代入后得

$$\frac{2a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{2}{3-\frac{2a_n}{a_{n+1}}} = \frac{2a_{n+1}}{3a_{n+1}-2a_n}, \qquad \text{所以} \qquad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n.$$

辅助方程（auxiliary equation）$t^2 - 3t + 2 = 0$ 的根是 1 和 2，所以 $a_n = A + B\cdot 2^n$。取 $a_1 = 1$（我们可以随意按比例缩放 a）及 $a_2 = 3$（使得 $x_1 = 2a_1/a_2 = \frac{2}{3}$），便得 $a_n = 2^n - 1$，从而 $x_n = \dfrac{2(2^n-1)}{2^{n+1}-1}$，与之前的公式相同。

验算

- 在公式中取 $n = 0$，得 $x_0 = 0$；而第一条等式 $3 = 2/x_1$ 确实就是一般的那一环 $x_0 + 2/x_1 = 3$ 在 $x_0 = 0$ 时的情况。这是一个漂亮的一致性检查。

- 当 $n \to \infty$ 时，$x_n \to 1$。递推关系的极限（limit）L 必须满足 $L = 2/(3-L)$，即 $L^2 - 3L + 2 = 0$，所以 $L = 1$ 或 $L = 2$，而我们的数列从下方趋近的正是 1。
- 由 $x_1 = \frac{2}{3}$ 出发，以精确分数反复计算 $x_{n+1} = 2/(3-x_n)$，结果对每个不超过 40 的 n 都与公式吻合；例如 $x_5 = \frac{62}{63}$。

常见错误

- 读错那串等式：方程是 $x_n + 2/x_{n+1} = 3$，而不是 $x_{n+1} + 2/x_n = 3$。弄错了就会得到另一个数列。
- 写到“规律如此类推”就停笔。题目要求的是证明，而几项数值只算是佐证。
- 在归纳步骤中，忘记把 $2 \cdot 2^{k+1}$ 改写成 $2^{(k+1)+1}$，以致结论始终没有明确显示为命题 $P(k+1)$。

STEP 之外

形如 $x_{n+1} = (ax_n + b)/(cx_n + d)$ 的递推关系，就是对一个莫比乌斯变换（Möbius transformation）作迭代（iteration），而且总可以像“其他方法”那样线性化。等价地，我们可以追踪 2×2 矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的幂，它的特征值（eigenvalues，这里是 1 和 2）支配着长远的变化。不动点（fixed points）1 和 2 分别是吸引的（attracting）和排斥的（repelling），这就是数列最终稳定于 1 的原因。关于矩阵的观点，可参阅 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）；至于数列收敛的一般理论，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（数学分析入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。