详细解答

# STEP II 1997，第 14 题

概率与统计 · 泊松过程

> **STEP II 1997，第 14 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q14

## 关键思路

虽然题目以力学为背景，这其实是一道泊松过程（Poisson process）的题目。运动学（kinematics）只是告诉我们哪些车辆要计算在内：一辆较快的车要在隧道内追上我，它进入隧道的时间必须在我之后某段时间之内。一旦知道这个时限，余下的一切都变成关于泊松计数的问题。在后半部分，我们会用到以下事实：若把泊松车流中的每辆车随机标记为快车或慢车，车流便会分拆成两个独立（independent）的泊松车流。我们还需要留意，一辆慢车会替我挡住它后面的所有快车。

## 解答

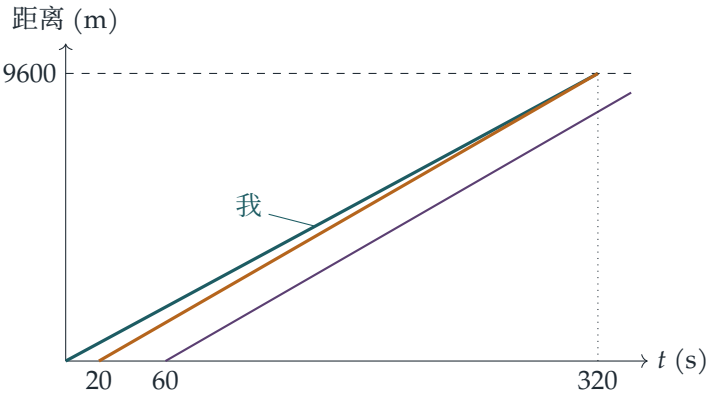
全题把车辆视为质点（particle）（不计车身长度），所以一辆车追上前车之后，便会一直以前车的速率行驶。以秒为单位量度时间 $t$，由我进入隧道的一刻起计。车辆以每分钟 6 辆的率进入，即每秒 0.1 辆，所以在任何长度为 $\tau$ 秒的时段内进入的车辆数目服从 $\mathrm{Po}(0.1\tau)$，而且互不相交的时段内的数目互相独立。

### 第一部分：谁能追上我？

我通过隧道需时 $9600/30 = 320\,\mathrm{s}$。考虑一辆以 $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 行驶、在时间 $t > 0$ 进入的车辆。在它追上我之前，于时间 $s$ 我已驶入隧道 $30s$，而它则驶入了 $32(s-t)$。两者在 $2s = 32t$ 时相等，即 $s = 16t$，此时距离隧道入口 $480t$ 米。所以它在我离开之前追上我，当且仅当

$$480t \le 9600 \iff t \le 20.$$

（等价地说：它通过隧道需时 $9600/32 = 300\,\mathrm{s}$，所以它不迟于我到达出口，当且仅当 $t + 300 \le 320$。）




这幅距离－时间图显示了我（蓝绿色）、一辆在 $t = 20$ 进入的快车（琥珀色）和一辆在 $t = 60$ 进入的快车（紫红色）。琥珀色的车刚好在我们同时到达出口的一刻追上我；任何更迟进入的快车，例如紫红色那一辆，在我离开时仍然在我后面。

其他车辆全部以 $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 行驶，所以在 $(0, 20]$ 内进入的车辆在到达我身后之前，不会被任何东西阻慢：除我以外，在它前面的任何车辆同样以 $32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 行驶，直至那辆车也追上我为止。比我先进入的车辆在我前面，与问题无关。所以我离开时身后的车龙，正好由在 $(0, 20]$ 内进入的车辆组成，其数目服从 $\mathrm{Po}(0.1 \times 20) = \mathrm{Po}(2)$。我身后车龙中车辆数目的期望值（expected value）是

$$\boxed{2}.$$

**第二部分：恰好有两辆车进入并追上我**

现在其他每辆车各有 $\frac{1}{2}$ 的概率是快车（$32\,\mathrm{m\,s^{-1}}$）或慢车（$30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$），并且与其他一切独立。

> ? **想一想** 在 20 秒内进入的每一辆快车，是否仍然都能追上我?

不是。一辆在时间 $t' > 0$ 进入的慢车，会一直与我保持 $30t'$ 米的固定距离，所以它永远追不上我。在它之后进入的快车会追上这辆慢车（或被慢车后面的其他车辆挡住），此后只能以 $30\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 行驶，所以它同样永远到不了我身后。因此，一辆在 $(0, 20]$ 内进入的车辆能追上我，当且仅当它是快车，*而且*在我与它之间进入的每一辆车都是快车。在 $t = 20$ 之后进入的快车，即使前面毫无阻挡，也追不上我。

设 $K \sim \mathrm{Po}(2)$ 为在 $(0, 20]$ 内进入的车辆数目。这一部分所求的事件，是恰好有两辆车在该时段内进入，而且两辆都追上我。这需要 $K = 2$ 且两辆车都是快车：

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}(K = 2) \times \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{2^2 \mathrm{e}^{-2}}{2!} \cdot \frac{1}{4} = \boxed{\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}} \approx 0.0677.$$

### 最后部分：恰好有两辆车在我身后排队

现在，头 20 秒内进入的车辆数目可以是任意的。把在 $(0,20]$ 内进入的 $K$ 辆车按进入的先后次序排列。根据上面的论证，我在出口时身后的车龙，就是这个列表开首那一串连续不断的快车。（在 $t=20$ 之后进入的车辆不可能加入车龙，因为它永远追不上我。）所以车龙中恰好有两辆车，当且仅当

- $K=2$ 且两辆都是快车：已知 $K=2$ 时，概率为 $\frac{1}{4}$；或
- $K\geq 3$，且头两辆是快车、第三辆是慢车：已知 $K=k\geq 3$ 时，概率为 $\frac{1}{8}$。

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\text{车龙有两辆车}) &= \tfrac{1}{4}\,\mathrm{P}(K=2)+\tfrac{1}{8}\,\mathrm{P}(K\geq 3)\\ &= \tfrac{1}{4}\cdot 2\mathrm{e}^{-2}+\tfrac{1}{8}\left(1-\mathrm{e}^{-2}-2\mathrm{e}^{-2}-2\mathrm{e}^{-2}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}+\tfrac{1}{8}-\tfrac{5}{8}\mathrm{e}^{-2}\\ &= \boxed{\tfrac{1}{8}\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)}\approx 0.108.\end{aligned}$$

这个答案比上一个大，而这是必然的：上一个事件只是出现两辆车车龙的其中一种情况。

> 一个巧妙的另解：把车流分拆成快车和慢车，得到两个独立的泊松过程，各自的率为 $0.05\,\mathrm{s}^{-1}$。车龙恰好有两辆车，意思是在头 20 秒内，最先到达的两辆是快车，而下一辆到达的车（如果有的话）是慢车。遇到事件带有标记的泊松题目时，从这两个车流的角度去想，往往是最快捷的途径。

## 验算

- 极限情况：假如每辆车都是慢车，便没有车能追上我；果然，当快车的概率为 0 时，车龙的公式给出 0。
- 若快车的概率是 $p$ 而不是 $\frac{1}{2}$，同样的论证给出 $p^2\mathrm{P}(K=2)+p^2(1-p)\mathrm{P}(K\geq 3)$。当 $p=1$ 时，这等于 $\mathrm{P}(K=2)=2\mathrm{e}^{-2}$，与第一部分吻合，因为那里的车龙长度正好服从 $\mathrm{Po}(2)$。
- 我们对不准超车的交通情况模拟了 $4\times 10^5$ 次。结果是第一部分的平均车龙长度为 2.003，第二部分的两个概率为 0.0674 和 0.1076，而准确值则是 0.0677 和 0.1081。

## 常见错误

- 忘记了一辆慢车会替我挡住它后面的所有快车,于是在最后部分答 $\mathrm{P}(20\text{ s 内恰好有两辆快车}) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$。
- 把每分钟 6 辆的率与以秒计的时间一并使用：20 秒内的平均数是 2，不是 120。
- 以为任何时间进入的车辆都会令车龙增长：只有在头 20 秒内进入的车辆才能到达我身后。

## STEP 之外

第二部分用到*稀疏化*（thinning）：若率为 $\lambda$ 的泊松过程中，每个事件各自独立地以概率 $p$ 被保留，则被保留和被舍弃的事件分别构成率为 $p\lambda$ 和 $(1-p)\lambda$ 的两个独立泊松过程。不能超车的车龙是交通流理论（traffic flow theory）中的经典模型，其中慢车会造成我们在这里见到的那种“车队”（platoon）。关于泊松过程和稀疏化，可参阅 Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。