详细解答

STEP II 1997，第 13 题

概率与统计 · 布丰投针问题

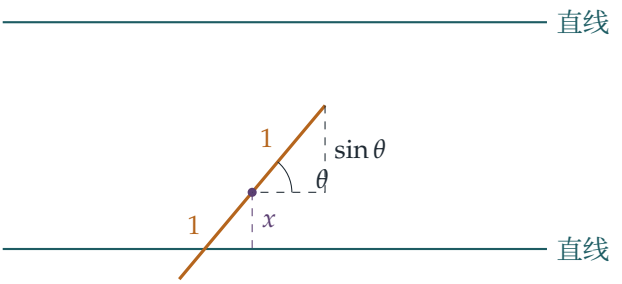
> **STEP II 1997，第 13 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q13

关键思路

这是布丰投针问题（Buffon's needle）。用两个独立（independent）的随机量来描述针的位置：针的中心与最近一条直线的距离，以及针与直线所成的锐角。中心一旦固定，一切就取决于针在垂直于直线的方向上伸展多远，也就是针的半长乘以该角的正弦。于是每一部分都化为关于一个均匀分布（uniformly distributed）的角的问题。

解答

我们按惯常的方式为“随机投下”建立模型：中心与最近一条直线的距离 X 在 $[0,1]$ 上均匀分布（直线相距 2 cm，所以最近的一条至多相距 1 cm），而针与直线所成的锐角 θ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上均匀分布，且与 X 独立。（若取角在 $[0,\pi)$ 上均匀分布，答案也一样，因为两种取法下 $\sin\theta$ 的分布相同。）



针的每一半长度为 1，所以两端分别在中心的上方和下方，垂直距离为 $\sin\theta$。

第 (i) 部分

设中心与最近一条直线相距 x，则针与该直线相交，当且仅当其中一端越过该直线，即

$$\sin\theta > x \iff \theta > \arcsin x,$$

因为 sin 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上递增。由于 θ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上均匀分布，

$$\mathrm{P}(\text{与最近的直线相交} \mid X = x) = \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{2}{\pi}\arcsin x = \frac{2}{\pi}\arccos x.$$

第 (ii) 部分

假设针与最近的直线相交，即 $\theta > \arcsin x$。沿着针量度，交点与中心相距 $x/\sin\theta$（这是一个直角三角形的斜边，其中 θ 的对边为 x）。所以两段的长度分别为 $1 + x/\sin\theta$ 和 $1 - x/\sin\theta$，较短的一段是

$$S = 1 - \frac{x}{\sin\theta}.$$

当 θ 由 $\arcsin x$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时，S 由 0 递增至 $1 - x$，所以 S 在 $[0, 1 - x]$ 内取值。

在相交的条件下，θ 在 $(\arcsin x, \frac{\pi}{2}]$ 上均匀分布，这个区间的长度为 $\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x$。对于 $0 \le s \le 1 - x$，

$$S \le s \iff \frac{x}{\sin\theta} \ge 1 - s \iff \sin\theta \le \frac{x}{1-s} \iff \theta \le \arcsin\frac{x}{1-s},$$

这里用到了 $1 - s > 0$ 和 $x/(1-s) \le 1$（因为 $s \le 1 - x$），所以反正弦有意义。因此较短一段的累积分布函数（cumulative distribution function）为

$$F(s) = \mathrm{P}(S \le s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ \dfrac{\arcsin\left(\frac{x}{1-s}\right) - \arcsin x}{\arccos x}, & 0 \le s \le 1 - x, \\ 1, & s > 1 - x. \end{cases}$$

作为合理性检查，中间的公式在 $s = 0$ 时给出 0，在 $s = 1 - x$ 时给出 $(\frac{\pi}{2} - \arcsin x)/\arccos x = 1$，所以 F 是连续的。

? **想一想** 为甚么得知针与直线相交之后，θ 仍然是均匀分布的?

把一个均匀分布的变量限制在某个子区间内（即以它落在该子区间为条件），它在该子区间上仍然是均匀分布的：对于 $\arcsin x \le a \le \frac{\pi}{2}$，$\mathrm{P}(\theta \le a \mid \theta > \arcsin x) = (a - \arcsin x)/(\frac{\pi}{2} - \arcsin x)$，这是 a 的线性函数。这正是我们所用到的。

第 (iii) 部分

最近的直线相距 $X \le 1$，而其他每一条直线都相距至少 $2 - X \ge 1$。针从中心最多伸展 $\sin\theta \le 1$，所以它要与最近那条以外的直线相交，只可能在 $X = 1$ 且 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 恰好成立的情况下发生，而这个情况的概率为零。所以针不碰到任何直线，当且仅当它不碰到最近的直线，于是由第 (i) 部分得

$$\mathrm{P}(\text{不相交} \mid X = x) = \frac{2}{\pi}\arcsin x.$$

由于 X 在 $[0,1]$ 上均匀分布（密度为 1），我们对 x 取平均：

$$\mathrm{P}(\text{不相交}) = \int_0^1 \frac{2}{\pi}\arcsin x \,\mathrm{d}x.$$

用分部积分法（integration by parts），取 $u = \arcsin x$ 及 $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arcsin x \,\mathrm{d}x &= \Big[x\arcsin x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} - \Big[-\sqrt{1-x^2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1.\end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{P}(\text{针不碰到任何直线}) = \frac{2}{\pi}\Big(\frac{\pi}{2} - 1\Big) = 1 - \frac{2}{\pi} \approx 0.363.$$

验算

- 第 (i) 部分在两端的表现合理：当 $x = 0$ 时，中心在直线上，概率为 1；当 $x \to 1$ 时，只有垂直于直线的针才碰得到，概率趋向 0。
- 相交的概率为 $2/\pi \approx 0.637$，即布丰的经典答案 $2\ell/(\pi d)$，其中 $\ell = d = 2$。
- 模拟 10^6 次随机投针，得出的不相交比率为 0.3626，而 $1 - 2/\pi = 0.3634$；对 $x = 0.2, 0.5, 0.7$ 模拟所得的 $F(s)$ 值与公式相符，误差约为 0.002。

常见错误

- 在第 (ii) 部分忘记取条件：除以 $\frac{\pi}{2}$ 而不是 $\arccos x$，会得出一个永远达不到 1 的“分布函数”。
- 把较短的一段取为 $1 - x\sin\theta$ 或 $1 - x/\cos\theta$：要查清楚三角形的哪一条边是 x，哪一个角是 θ。
- 在第 (iii) 部分乘以 $\frac{1}{2}$，或取 X 在 $[0,2]$ 上均匀分布而没有相应调整相交的条件；与最近直线的距离是在 $[0,1]$ 上均匀分布的。

STEP 之外

布丰投针问题（1777 年）是几何概率（geometric probability）中最早的问题之一，而 π 的出现意味着投针可以给出 π 的一个（缓慢的）蒙地卡罗（Monte Carlo）估计。最简洁的现代处理方法利用期望值的线性性质（linearity of expectation）：相交次数的期望值与针的长度成正比，即使针是弯曲的也一样（“布丰面条”，Buffon's noodle），由此可通往积分几何（integral geometry）和克罗夫顿公式（Crofton formula）。Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率入门教材）讨论了联合分布（joint distribution）和这一类几何概率问题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。