详细解答

STEP II 1997，第 11 题

力学 • 抛体运动

STEP II 1997，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

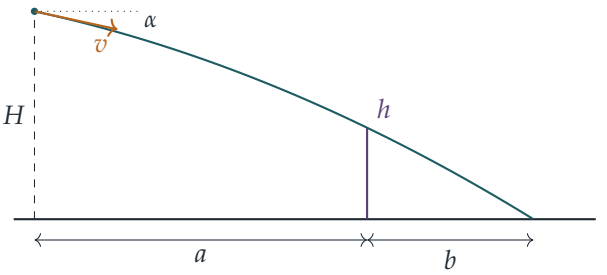
step.maths.org/questions/97-s2-q11

关键思路

先把轨迹（trajectory）写成一条方程，以水平移动距离表示球比发球者击球高度下降了多少。这样，题目给出的两项事实（球水平移动了 a 时高度为 h，水平移动了 $a+b$ 时高度为 0）就是关于两个未知数 v 和 α 的两条方程。至于上下界，则来自这个问题：这两条方程的解在甚么时候才真正具有物理意义？

解答

我们把球看成只受重力作用的质点（particle），即不考虑空气阻力（air resistance）和旋转。取击球点正下方的地面为原点，x 轴沿水平方向指向球网，y 轴铅垂向上。



v^2 的公式

初速度为 $(v\cos\alpha, -v\sin\alpha)$。经过时间 t 后，

$$x = vt\cos\alpha, \qquad y = H - vt\sin\alpha - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

以 $t = x/(v\cos\alpha)$ 消去时间，并利用 $\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$，得

$$y = H - x\tan\alpha - \frac{gx^2(1+\tan^2\alpha)}{2v^2}. \qquad (*)$$

为方便起见，记 $T = \tan\alpha$ 及 $k = \dfrac{g(1+T^2)}{2v^2}$，于是 $y = H - xT - kx^2$。

球在 $x = a + b$ 处着地，所以在该处代入 $y = 0$：

$$0 = H - (a+b)T - k(a+b)^2 \quad\Longrightarrow\quad k = \frac{H-(a+b)T}{(a+b)^2}. \qquad (1)$$

把 k 换回它的定义，再整理成 v^2 的表达式，得

$$v^2 = \frac{g(a+b)^2(1+\tan^2\alpha)}{2[H-(a+b)\tan\alpha]},$$

这就是第一个结果。

$\tan\alpha$ 的公式

球刚好越过球网，所以在 $x = a$ 处 $y = h$。由 $(*)$ 得

$$H - h = aT + ka^2.$$

代入 (1) 中的 k，并将全式乘以 $(a+b)^2$：

$$\begin{aligned}(H-h)(a+b)^2 &= aT(a+b)^2 + a^2\big[H-(a+b)T\big]\\ &= aT(a+b)\big[(a+b)-a\big] + a^2H\\ &= abT(a+b) + a^2H.\end{aligned}$$

把含 H 的项合并，并利用 $(a+b)^2 - a^2 = b(2a+b)$，得

$$ab(a+b)T = b(2a+b)H - (a+b)^2h.$$

两边除以 $ab(a+b)$（此数为正），得

$$\tan\alpha = \frac{2a+b}{a(a+b)}H - \frac{a+b}{ab}h,$$

正是所求。

H 的范围

给定 a、b、h 和 H 后，第二条公式决定了 $\tan\alpha$，然后第一条公式决定了 v^2。当且仅当这些值都合理时，这样的发球才存在：即 $\tan\alpha > 0$（球是向下击出的，所以 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$）以及 $v^2 > 0$。

想一想 v^2 的分子显然是正数。那么 $v^2 > 0$ 实际上要求甚么?

它要求分母为正：$H - (a+b)\tan\alpha > 0$。代入 $\tan\alpha$ 的公式，

$$\begin{aligned} H - (a+b)\tan\alpha &= H - \frac{2a+b}{a}H + \frac{(a+b)^2}{ab}h \\ &= -\frac{a+b}{a}H + \frac{(a+b)^2}{ab}h = \frac{a+b}{a}\left[\frac{(a+b)h}{b} - H\right]. \end{aligned}$$

由于 $(a+b)/a > 0$，上式为正当且仅当

$$H < \frac{(a+b)h}{b}.$$

要使 $\tan\alpha > 0$，我们需要

$$\frac{2a+b}{a(a+b)}H > \frac{a+b}{ab}h \quad\Longleftrightarrow\quad H > \frac{(a+b)^2 h}{b(2a+b)},$$

这里两边乘以了正数 $a(a+b)/(2a+b)$。

两个条件合起来就是

$$\boxed{\frac{(a+b)^2}{b(2a+b)}h \;<\; H \;<\; \frac{a+b}{b}h}$$

反过来，在这个范围内的任何 H 都给出合理的 α 和 v。这个区间非空，因为 $\dfrac{a+b}{2a+b} < 1$。

两个界限都有清晰的意义。上界是这样的一个高度：由着地点经过网顶的直线，与发球者所在的铅垂线相交之处。重力使路径向下弯曲，所以球必须从这条直线下方出发（在 $H = (a+b)h/b$ 时，我们需要无限大的速率）。下界则对应 $\alpha = 0$ 的情况，即水平发球；若从比这更低的位置发球，球就必须向上击出，才能越过球网而仍然落在指定的着地点。

验算

- 取 $a = 12\,\text{m}$、$b = 6\,\text{m}$ 及 $h = 1\,\text{m}$，范围为 $1.8\,\text{m} < H < 3\,\text{m}$。当 $H = 1.8$ 时，公式给出 $\tan\alpha = \frac{30}{216}(1.8) - \frac{18}{72} = 0$，与下界应有的结果一致。
- 在范围内随机选取 a、b、h 和 H，用两条公式算出 α 和 v，再以数值方法逐步模拟运动，结果球每次都经过网顶，并落在 $x = a + b$ 处（就精确路径而言，相对误差低于 10^{-14}）。
- 量纲（dimensions）：$\tan\alpha$ 的每一项都是长度除以长度，而 v^2 的量纲是 $g\times$ 长度，正如所料。

常见错误

- 因角度向下而弄错正负号：初始铅垂速度是 $-v\sin\alpha$，而 $(*)$ 中的 $x\tan\alpha$ 一项是减去的。
- 写到“$v^2 > 0$”就停下来，没有留意到这其实是对分母的条件；要代入 $\tan\alpha$ 之后，它才变成对 H 的条件。

STEP 之外

在这题中，是两个边界条件（球网和着地点）决定了发射条件，而不是反过来：这是一个简单的*边值问题*（boundary-value problem），也是以数值方法求解微分方程（differential equations）的“打靶法”（shooting methods）背后的想法。一旦考虑空气阻力和旋转，方程就不再有闭合形式（closed-form）的解，那时正正要用这种方法来处理。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）讨论了带阻力的抛体运动，以及更多其他课题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。