详细解答

STEP II 1997，第 10 题

力学 · 爆炸与弹性碰撞

> **STEP II 1997，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q10

关键思路

把每个速度分解成沿轴的分量和垂直于轴的分量。圆柱面是光滑的，所以它只能沿径向施力：它永远不会改变轴向速度，而弹性反弹只是把横向速度反转。爆炸时的动量守恒（conservation of momentum）迫使两块碎片沿同一条直径飞开，于是整个问题就变成两面墙之间的一维运动，轴向运动只是顺带跟着走。

解答

建立模型

把碎片当作质点（particle）（它们很小），圆柱视为光滑而固定，并按题目指示忽略重力。取 z 轴沿圆柱的轴，并设爆炸在时间 $t = 0$ 发生于原点。

紧接爆炸之后，把质量为 qM 的碎片的速度写成轴向分量 w_1 加上横向分量 $\mathbf{u}_1$（垂直于轴），质量为 $(1-q)M$ 的碎片则同样写成 w_2、$\mathbf{u}_2$。爆炸期间没有外力作用，所以动量守恒：

$$qMw_1 + (1-q)Mw_2 = Mv, \qquad qM\mathbf{u}_1 + (1-q)M\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}.$$

第二条方程说明两个横向速度方向相反，所以两块碎片沿同一条直径、以相反方向离开轴。把这条直径称为 x 方向，碎片 1（质量 qM）以速率 u_1 向 $x = +L$ 运动，碎片 2 以速率 u_2 向 $x = -L$ 运动，其中

$$qu_1 = (1-q)u_2. \tag{1}$$

由于 $q \le \frac{1}{2}$，我们有 $u_1 \ge u_2$：较轻的碎片较快。

每块碎片都是正面撞向墙壁（它沿半径运动），所以光滑墙壁的冲量（impulse）沿该半径方向。这会把横向速度反转（反弹是完全弹性的），而轴向速度则不受影响。因此每块

碎片一直沿同一条直径运动，而它的轴向速度自始至终保持不变。

证明 $q = \frac{3}{8}$

轴向运动。轴向位置为 $z_1 = w_1 t$ 和 $z_2 = w_2 t$。两块碎片在某个时间 $t > 0$ 相遇，所以 $w_1 = w_2$，再由动量方程得 $w_1 = w_2 = v$。两块碎片都与原来的物体本应到达的位置并肩前进。

横向运动。碎片 1 在 $t = L/u_1$ 到达 $x = L$，然后折返，所以反弹之后

$$x_1 = L - u_1\left(t - \frac{L}{u_1}\right) = 2L - u_1 t.$$

同理，碎片 2 反弹之后位于 $x_2 = -2L + u_2 t$。它们在两者都反弹之后才碰撞，所以由 $x_1 = x_2$ 得

$$t = \frac{4L}{u_1 + u_2}, \qquad x = 2L - \frac{4Lu_1}{u_1 + u_2} = 2L\,\frac{u_2 - u_1}{u_1 + u_2}.$$

由 (1)，$u_2 = \frac{q}{1-q}u_1$，所以 $u_1 + u_2 = \frac{u_1}{1-q}$ 及 $u_2 - u_1 = \frac{(2q-1)u_1}{1-q}$。因此碰撞点为

$$x = 2L(2q - 1).$$

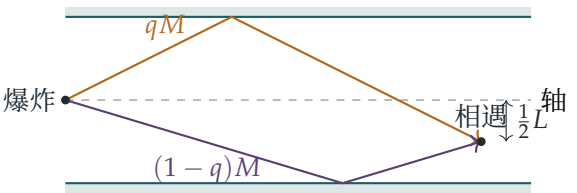
我们需要 $|x| = \frac{1}{2}L$，所以 $2q - 1 = \pm\frac{1}{4}$，得 $q = \frac{5}{8}$ 或 $q = \frac{3}{8}$。由于 $q \le \frac{1}{2}$，

$$q = \tfrac{3}{8},$$

正如所求。碰撞发生在 $x = -\frac{1}{2}L$，位于轴的较重碎片那一侧。

? **想一想** 这真的是第一次相遇，而且两者都刚好各反弹了一次吗?

当 $q = \frac{3}{8}$ 时，由 (1) 得 $u_2 = \frac{3}{5}u_1$。碎片 1 在 $t = L/u_1$ 反弹，碎片 2 在 $t = \frac{5}{3}L/u_1$ 反弹，而碰撞时间为 $4L/(u_1 + u_2) = \frac{5}{2}L/u_1$，比两者都迟。它们会否更早相遇？在碎片 1 反弹之前，两者正在互相远离；而碎片 1 在回程中要到 $t = 2L/(u_1 - u_2) = 5L/u_1$ 才会追上碎片 2，那时碎片 2 早已掉头。所以我们找到的相遇就是第一次相遇，而每块碎片都刚好反弹了一次。



图中所示是包含轴和该公共直径的平面（轴向为横向）；此图按 $q = \frac{3}{8}$ 及下文求得的速率依比例绘画。

爆炸所给予的能量

碰撞时间为

$$t = \frac{4L}{u_1 + u_2} = \frac{4L(1-q)}{u_1} = \frac{5L}{2u_1}.$$

令它等于 $5L/v$，得 $u_1 = \frac{1}{2}v$，于是 $u_2 = \frac{3}{5}u_1 = \frac{3}{10}v$。

轴向速度维持在 v 不变，所以爆炸中所增加的动能（kinetic energy）纯粹是横向动能：

$$\begin{aligned}\Delta E &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{8}M(\tfrac{1}{2}v)^2 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{8}M(\tfrac{3}{10}v)^2 \\ &= \tfrac{1}{2}Mv^2\left(\tfrac{3}{32} + \tfrac{9}{160}\right) = \tfrac{1}{2}Mv^2\cdot\tfrac{3}{20} = \frac{3Mv^2}{40}.\end{aligned}$$

合并后的速度

紧接碰撞之前，每块碎片的横向速度都已因反弹而反转：碎片 1 的横向动量为 $-qMu_1$，碎片 2 的为 $+(1-q)Mu_2$。由 (1)，两者之和为零。轴向动量为 $qMv + (1-q)Mv = Mv$。合并（coalescence）过程中动量守恒，所以质量为 M 的合并体的速度为

$$v，\text{沿轴的方向},$$

与原来的物体相同，但它沿着一条与轴平行、距离轴 $\frac{1}{2}L$ 的直线运动。来自爆炸的 $\frac{3}{40}Mv^2$ 能量在合并中全部损失。

验算

- $q = \frac{1}{2}$ 给出 $x = 0$：两块相等的碎片互为镜像，必定在轴上相遇，合乎预期。
- 取 $L = v = 1$，$u_1 = 0.5$ 及 $u_2 = 0.3$：当 $t = 5$ 时，碎片 1 位于 $2 - 0.5\times 5 = -0.5$，碎片 2 位于 $-2 + 0.3\times 5 = -0.5$。一个在 $x = \pm 1$ 处设有反射的逐步时间模拟，重现了两者各反弹一次后在 $t = 5.000$、$x = -0.500$ 相遇的结果。
- 最终的横向动量为 $-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2} + \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{10} = 0$，所以最终速度纯粹是轴向的。

常见错误

- 让墙壁改变了轴向速度。光滑的墙壁只会施加法向（径向）力。
- 忘记反弹会把横向动量反转。总横向动量要待两块碎片都反弹之后才回复为零。
- 保留 $q = \frac{5}{8}$：那是把两块碎片的标号对调后的同一个情况，已被 $q \le \frac{1}{2}$ 排除。

STEP 之外

把运动分解成沿对称方向和垂直于对称方向的分量，是一个重要思想的开端：系统的一种对称性（symmetry）会带来一个守恒量（conserved quantity）。这里圆柱沿其长度处处看来都一样，所以即使有墙壁存在，轴向动量仍然守恒（诺特定理（Noether's theorem）把这一点说得精确）。本题亦显示，爆炸之后接着一次完全非弹性碰撞（perfectly inelastic collision），可以把能量以热的形式交还，而轴向运动却丝毫不受影响，照样继续。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）正是以这种方式阐述动量和质心（centre of mass）运动。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。