详细解答

STEP II 1997，第 1 题

纯数学 · 数字和与计数

> **STEP II 1997，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/97-s2-q1

关键思路

不要把这些数逐一列出：先数清楚有多少个，再把每个位值（place value）的贡献分开相加。在末三个数位上，每个可用的数字出现的次数都相同，所以这些和几乎不用怎样计算就出来了。更妙的是，这里有一种对称性（symmetry）：把每个数字 d 换成 $7-d$，就会把 $0 \leftrightarrow 7$ 和 $2 \leftrightarrow 5$ 互换，于是这些数可以两两配对，每对的和都相同，因数分解（factorisation）也随即得出。

解答

哪些数符合条件？

介乎 1000 与 6000 之间而符合条件的数有四个数位，而它的千位数字必定是 $0, 2, 5, 7$ 其中之一。千位不可以是 0（否则不足四位），也不可以是 7（否则这个数会超过 7000）。所以千位数字是 2 或 5，而由 2000 至 5777 之间按此方式组成的每一个数都在范围之内。两个端点 1000 和 6000 本身含有数字 1 和 6，所以“之间”是否包括端点并无影响。

其余三个数位各自可以独立地取四个可用数字中的任何一个。所以共有

$$2 \times 4 \times 4 \times 4 = 128$$

个数。

按位值相加

千位。这 128 个数之中有一半，即 64 个，以 2 开首，另外 64 个以 5 开首。千位数字的贡献是

$$64 \times (2+5) \times 1000 = 448\,000.$$

百位、十位和个位。固定其中一个数位。四个数字各自恰好在 $128/4 = 32$ 个数的这个数位上出现，因为不论这个数位上放的是哪个数字，其余数位的选法数目都相同。因此这个数位上的数字总和是 $32 \times (0+2+5+7) = 32 \times 14 = 448$。这三个数位的权重分别是 100、10 和 1，所以它们合共的贡献是

$$448 \times (100+10+1) = 448 \times 111 = 49\,728.$$

相加之后，所求的和是

$$S = 448 \times 1000 + 448 \times 111 = 448 \times 1111 = 497\,728.$$

写成质数的乘积

我们有 $448 = 64 \times 7 = 2^6 \times 7$，以及 $1111 = 11 \times 101$，其中 101 是质数（prime）（它不能被 2、3、5 或 7 整除，而且 $11^2 > 101$）。因此

$$S = 2^6 \times 7 \times 11 \times 101.$$

想一想 有没有方法可以不必逐个位值记帐，就看出答案?

有。如果 n 符合条件，那么 $7777 - n$ 也符合条件：从 7777 逐位相减时不需要借位，而且每个数字 d 都会变成 $7-d$，这个变换把 $\{0,2,5,7\}$ 映射到它自身，并把首位数字 2 和 5 互换。所以这 128 个数可分成 64 对，每对的和都是 7777（没有任何数会与自己配对，因为 7777 是奇数）。因此

$$S = 64 \times 7777 = 2^6 \times 7 \times 1111 = 2^6 \times 7 \times 11 \times 101,$$

与上面的计算结果一致。

验算

用电脑在 1000 至 6000 之间作简短的搜索，可找到恰好 128 个符合条件的数，其和为 497 728，而 $2^6 \times 7 \times 11 \times 101 = 64 \times 7777 = 497\,728$。再从大小上检查是否合理：符合条件的数的平均值是 $7777/2 = 3888.5$，正好稳稳落在 2000 至 5777 这个范围的中间。

常见错误

- 容许 7 作为首位数字（得出超过 6000 的数），或者忘记 0 不可以放在首位。
- 以为每个数字在千位上也出现 128/4 次：千位上只会出现 2 和 5，各 64 次。
- 停在 497 728 或 448×1111，没有把 1111 分解成 11×101。

STEP 之外

数算每个数字在每个数位上出现多少次，是算两次（double counting）论证最简单的例子：把同一个量按两种次序求和，这里就是按数和按数位。$7777 - n$ 的配对是一种对称性论证，高斯（Gauss）的公式 $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ 也可以用同类的论证得出。数字取自某个固定集合的数，以及它们的和，是初等数论（elementary number theory）和组合数学（combinatorics）中的常见题材；Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（高等算术）是很值得一读的下一步。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。