详细解答

# STEP I 1997，第 9 题

力学 · 相对速度

> **STEP I 1997，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q9

## 关键思路

站在路边看，一切都在移动；但从车上看，一切都是静止的：汽车变成一排固定的方块，方块之间有长度为 $c$ 的空隙，而小鸡则以牠的相对速度（relative velocity）沿直线走过去。小鸡要顺利通过，唯一的条件是：当牠身处阔度为 $a$ 的行车线内时，牠（相对于汽车）的横向漂移不超过空隙长度 $c$。单凭这一个条件就能得出所求的不等式，而最小速率则来自求 $c\sin\theta + a\cos\theta$ 的最大值，这是标准的 $R\cos(\theta - \alpha)$ 做法。

## 解答

我们把小鸡看成质点（particle），把汽车看成以速率 $V$ 移动的长方形，每辆车都占据横跨道路、阔度为 $a$ 的同一条带状区域。取 $x$ 轴沿道路指向车流方向，$y$ 轴横跨道路，于是小鸡的速度是 $(u\cos\theta,\, u\sin\theta)$，其中 $0 < \theta < \pi$。只有汽车所在的那条带状区域才需要考虑：在道路的其他地方，小鸡毫无危险。

### 不等式

相对于汽车，小鸡的速度是

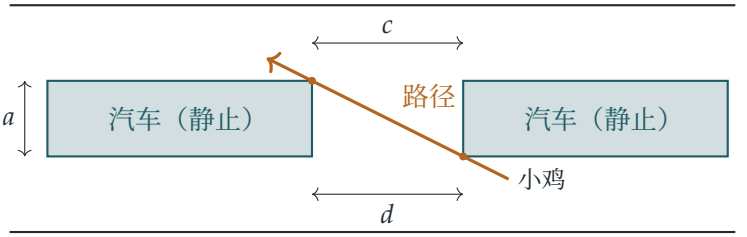
$$\mathbf{w} = (u\cos\theta - V,\ u\sin\theta).$$

在汽车的参考系（frame of reference）中，汽车静止不动，小鸡则以恒定速度 $\mathbf{w}$ 沿直线运动。牠横过阔度为 $a$ 的带状区域所需的时间是

$$\tau = \frac{a}{u\sin\theta}$$

而在这段时间内，牠（相对于汽车，逆着车流方向）向后滑移了

$$d = (V - u\cos\theta)\,\tau = \frac{a(V - u\cos\theta)}{u\sin\theta}.$$




图中所示的是极端情况 $d = c$，此时路径刚好沿着空隙的对角线。

**想一想** 为甚么漂移量 $d$ 最多只能是 $c$?

在汽车的参考系中，小鸡穿过带状区域的路径沿道路方向覆盖了长度为 $|d|$ 的一段，而这一段上的每一点，小鸡都会在行车线内的某个高度经过。静止的汽车之间只留下长度为 $c$ 的空隙，所以整段必须容纳在同一个空隙之内：$|d| \le c$。（反过来说，若 $|d| \le c$，小鸡可以选择适当的出发时刻，使这一段落在某个空隙之内，从而安全横过。）

特别地，$d \le c$，即

$$a(V - u\cos\theta) \le c\,u\sin\theta, \qquad \text{所以} \qquad Va \le u\,(c\sin\theta + a\cos\theta).$$

左边是正数，所以凡是安全的横过方式都有 $c\sin\theta + a\cos\theta > 0$，我们可以把它除过去：

$$u \ge \frac{Va}{c\sin\theta + a\cos\theta},$$

这正是所要证明的。（条件的另一半 $d \ge -c$，是防止跑得快的小鸡越过空隙而撞上前面的汽车；它在下面求最小值的过程中不起作用。）

### 最小速率与横过时间

写成 $c\sin\theta + a\cos\theta = \sqrt{a^2 + c^2}\,\cos(\theta - \alpha)$，其中 $\alpha$ 是满足以下条件的锐角：

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \qquad \sin\alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \qquad \tan\alpha = \frac{c}{a}.$$

所以 $c\sin\theta + a\cos\theta \le \sqrt{a^2 + c^2}$，等号仅在 $\theta = \alpha$ 时成立。因此对每一个方向都有

$$u \ge \frac{Va}{c\sin\theta + a\cos\theta} \ge \frac{Va}{\sqrt{a^2 + c^2}},$$

而当 $\theta = \alpha$ 且 $u = Va/\sqrt{a^2 + c^2}$ 时，两个不等式都取等号。这个选择确实是安全的：它恰好给出 $d = c$（即图中由一角到对角的路径），而且 $-c \le d \le c$ 成立。所以最小可能的匀速率是 $Va/\sqrt{a^2 + c^2}$，方向角为 $\alpha = \arctan(c/a)$。

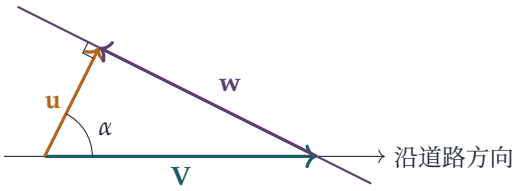
小鸡以横跨道路方向的速度分量 $u\sin\alpha$ 走过整个路阔 $b$，所以所需时间是

$$\frac{b}{u\sin\alpha} = b\cdot\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{Va}\cdot\frac{\sqrt{a^2+c^2}}{c} = \frac{b\,(a^2+c^2)}{Vac} = \frac{b}{V}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right),$$

这就是所求的结果。

**想一想** 为甚么最小速率出现在 $\tan\theta = c/a$ 的时候?

看看各个速度。小鸡的速度是 $\mathbf{u} = \mathbf{V} + \mathbf{w}$，而在最理想的情况下，相对速度 $\mathbf{w}$ 沿着空隙的对角线，方向为 $(-c, a)$。所以 $\mathbf{u}$ 的末端落在经过 $\mathbf{V}$ 的末端、沿该方向的直线上，而最短的 $\mathbf{u}$ 就是由原点到这条直线的垂线。它的方向 $(a, c)$ 与道路成 $\arctan(c/a)$ 的角，而它的长度是 $V\sin(\text{对角线的倾角}) = Va/\sqrt{a^2+c^2}$。




## 验算

- 单位：$Va/\sqrt{a^2+c^2}$ 是速率，而 $\frac{b}{V}\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$ 是长度除以速率，即时间。
- 极限情况：若 $\theta = \frac{\pi}{2}$（垂直横过），所得的界是 $u \geq Va/c$：小鸡必须在一个空隙经过所需的时间 $c/V$ 内走过阔度 $a$。这显然是对的。
- 数值：取 $a = 1$，$c = 2$，$V = 2$，$b = 5$，最小速率是 $2/\sqrt{5} \approx 0.894$，此时 $\tan\theta = 2$，而横过时间是 $\frac{5}{2}\left(2+\frac{1}{2}\right) = 6.25$。在道路参考系中直接模拟汽车和小鸡的运动，结果与此吻合：以这个速率的 1.01 倍能找到安全的出发时刻，以 0.99 倍则找不到。

## 常见错误

- 在安全条件中使用横过整条道路的时间 $b/(u\sin\theta)$。其实只有身处阔度为 $a$ 的行车线内的那段时间才有关系。
- 弄错相对速度的正负号：相对于汽车，小鸡沿道路方向的速度是 $u\cos\theta - V$，而不是 $u\cos\theta + V$。

## STEP 之外

转换到障碍物静止的参考系，是一个伽利略变换（Galilean transformation）；选取令问题变成静态的参考系，是力学中最有用的习惯之一。这里求最小值的过程也是一个小型的最优化（optimisation）问题：由一点到一条直线的最短向量就是垂线，你日后会在线性代数（linear algebra）中以正交投影（orthogonal projection）的形式再次遇上它。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）中有很多这类关于相对运动的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。