详细解答

STEP I 1997，第 8 题

纯数学 · 指数方程的根

> **STEP I 1997，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q8

关键思路

方程 $x = a^x$ 的根必定是正数，因为 $a^x > 0$。因此我们可以取对数（logarithm），把问题转化为研究 $f(x) = \ln x - x \ln a$ 在 $x > 0$ 上的零点（zero）。当 $a > 1$ 时，这个函数先升后降，所以只有在其极大值（maximum）不小于 0 时才有零点。当 $0 < a < 1$ 时，它严格递增（strictly increasing），所以最多只能穿过零一次，问题就在于它究竟有没有穿过。

解答

化为 $f(x) = 0$

全题中 $a > 0$，所以 $a^x = e^{x \ln a}$ 对所有实数 x 都有定义，而且是正数。若 $x \le 0$，则 $a^x > 0 \ge x$，所以没有满足 $x \le 0$ 的根。当 $x > 0$ 时，两边都是正数，而 $\ln$ 严格递增，故

$$x = a^x \iff \ln x = x \ln a \iff f(x) = 0, \qquad \text{其中} f(x) = \ln x - x \ln a.$$

所以 $x = a^x$ 的实根正好就是 f 在 $(0, \infty)$ 上的零点。

当 $a > e^{1/e}$ 时没有根

这时 $a > e^{1/e} > 1$，所以 $\ln a > 0$。求导数（derivative），得

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \ln a,$$

它在 $0 < x < 1/\ln a$ 时为正，在 $x > 1/\ln a$ 时为负。所以 f 先递增后递减，它在 $(0, \infty)$ 上的极大值是

$$f\left(\frac{1}{\ln a}\right) = \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right) - 1 = -\ln(\ln a) - 1.$$

现在由 $a > e^{1/e}$ 得 $\ln a > 1/e$，再取一次对数（两边都是正数），得 $\ln(\ln a) > \ln(1/e) = -1$。因此

$$f(x) \leq -\ln(\ln a) - 1 < 0 \quad \text{对所有} x > 0.$$

所以 f 永不为零，方程 $x = a^x$ 没有实根，这正是所要证明的。

想一想 当 $a = e^{1/e}$ 时，以及当 $1 < a < e^{1/e}$ 时，情况究竟如何？

当 $a = e^{1/e}$ 时，极大值刚好是 0，在 $x = 1/\ln a = e$ 处取得，所以有一个（重）根 $x = e$：直线 $y = x$ 与 $y = a^x$ 在 (e, e) 相切（tangent）。当 $1 < a < e^{1/e}$ 时，极大值为正，而在两端都有 $f \to -\infty$，所以有两个根。（当 $a = 1$ 时，唯一的根是 $x = 1$。）题目并没有要求讨论这些情况，但它们说明 $e^{1/e}$ 正好就是分界点。

当 $0 < a < 1$ 时恰有一个根

现在 $\ln a < 0$，所以

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \ln a = \frac{1}{x} + |\ln a| > 0 \quad \text{对所有} x > 0,$$

故 f 在 $(0, \infty)$ 上严格递增。因此 f 最多只有一个零点。

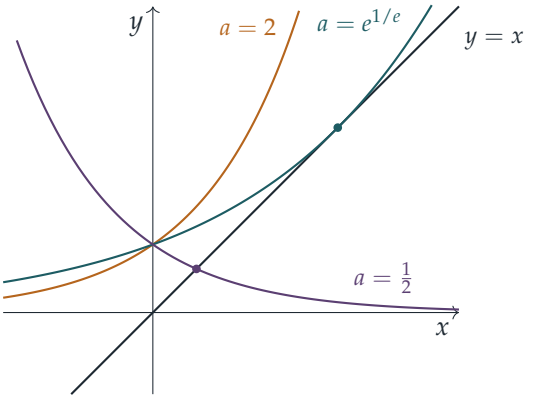
要说明它确实有一个零点，注意 f 在 $(0, \infty)$ 上连续（continuous），而且

$$f(1) = -\ln a > 0, \qquad f(a) = \ln a - a \ln a = (1 - a) \ln a < 0,$$

两式都用到 $0 < a < 1$。根据介值定理（intermediate value theorem），f 在 a 与 1 之间有一个零点。

所以当 $0 < a < 1$ 时，方程 $x = a^x$ **恰有一个**实根，而且它位于区间 $(a, 1)$ 之内。

从图像看便一目了然：$y = a^x$ 递减而且恒为正，而 $y = x$ 递增，所以两个图像恰好相交一次。（等价地说，$g(x) = a^x - x$ 严格递减，且 $g(0) = 1 > 0$，$g(1) = a - 1 < 0$。）



验算

- 在分界处，$(e^{1/e})^e = e$，所以当 $a = e^{1/e} \approx 1.4447$ 时，$x = e$ 的确是一个根，与相切的情况吻合。
- 当 $a = \frac{1}{2}$ 时，用二分法（bisection）求得唯一的根 $x \approx 0.6412$，一如所料位于 $(\frac{1}{2}, 1)$ 之内。
- 数值上，随机选取 200 个 $a > e^{1/e}$，函数 $a^x - x$ 在 $[-20, 20]$ 的细密格点上始终为正；$\ln x - x \ln a$ 的极大值与 $-1 - \ln \ln a$ 吻合；当 a 略小于 $e^{1/e}$ 时有两个根；而随机选取 500 个 $a \in (0, 1)$，每次都恰好只有一次变号。

常见错误

- 没有先指出任何根都满足 $x > 0$ 就取对数：否则 $\ln x$ 没有定义，所以 $x \leq 0$ 的情况需要另作（一行的）论证。
- 当 $0 < a < 1$ 时只证明 f 递增。这只证明了最多有一个根；你还需要找到一次变号，才能证明确实有一个根。
- 对 $\ln a > 1/e$ 取 ln 时把不等号的方向弄反；这一步之所以稳妥，是因为 ln 递增，而且两边都是正数。

STEP 之外

当 $0 < a < 1$ 时，那个根是映射 $x \mapsto a^x$ 的不动点（fixed point），而反复迭代 $x_{n+1} = a^{x_n}$ 就引出“无穷幂塔”（infinite power tower）$a^{a^{a^{\cdots}}}$。欧拉（Euler）证明了这个幂塔恰好在 $e^{-e} \leq a \leq e^{1/e}$ 时收敛（converge），所以同一个分界点 $e^{1/e}$ 再次出现。研究迭代何时收敛，会引向大学一年级分析学中的压缩映射定理（contraction mapping theorem）；Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析学入门教材）涵盖了介值定理及所需的背景知识。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。