详细解答

STEP I 1997，第 7 题

纯数学 · 高斯求积法

STEP I 1997，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s1-q7

关键思路

等式两边对 P 都是线性（linearly）的，所以只要公式对四个基本的三次多项式（cubic）1、t、t^2 和 t^3 成立，它就对所有三次多项式成立。这样一来，问题便化为含四个未知数的四条方程。这些方程虽然是非线性的，但奇次幂与偶次幂可以干净利落地分开，余下的工作就交给关于 $t = 0$ 的对称性（symmetry）。

解答

设 $\mathrm{P}(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$。则

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = c_0 \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}t + c_1 \int_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t + c_2 \int_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t + c_3 \int_{-1}^{1} t^3\,\mathrm{d}t,$$

而 $a_1\mathrm{P}(u_1) + a_2\mathrm{P}(u_2)$ 也可以用完全相同的方式拆开。因此，公式对所有三次多项式成立，当且仅当它对 $\mathrm{P}(t) = t^k$，$k = 0, 1, 2, 3$ 成立。（“仅当”是因为每个 t^k 本身都是广义的三次多项式；“当”则只需把各项加起来。）由于 $\int_{-1}^{1} t^k\,\mathrm{d}t$ 在 $k = 0, 1, 2, 3$ 时分别为 2, 0, $\frac{2}{3}$, 0，我们需要

$$a_1 + a_2 = 2, \tag{A}$$

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0, \tag{B}$$

$$a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 = \tfrac{2}{3}, \tag{C}$$

$$a_1 u_1^3 + a_2 u_2^3 = 0. \tag{D}$$

? **想一想** 这些方程是非线性的。有没有哪一个组合可以因式分解（factorise）？

取 (D) 减去 u_2^2 乘以 (B)：含 a_2 的项互相抵消，得

$$a_1u_1^3 - a_1u_1u_2^2 = a_1u_1(u_1-u_2)(u_1+u_2) = 0.$$

我们逐一排除前三个因式为零的情况。

- 若 $a_1 = 0$：由 (A) 得 $a_2 = 2$，由 (B) 得 $u_2 = 0$，于是 (C) 变成 $0 = \frac{2}{3}$。不可能。
- 若 $u_1 = 0$：由 (B) 得 $a_2u_2 = 0$，所以 $a_2u_2^2 = 0$，(C) 同样变成 $0 = \frac{2}{3}$。不可能。
- 若 $u_1 = u_2$：两点重合，(B) 变成 $(a_1+a_2)u_1 = 2u_1 = 0$，所以 $u_1 = u_2 = 0$，(C) 再次不成立。

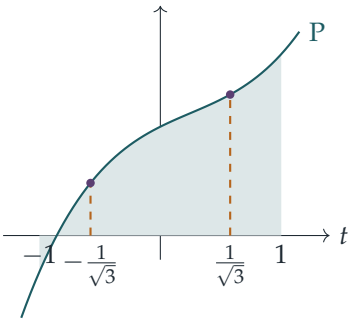
因此 $u_2 = -u_1$，且 $u_1 \neq 0$。这时 (B) 变成 $(a_1-a_2)u_1 = 0$，所以 $a_1 = a_2$，再由 (A) 得 $a_1 = a_2 = 1$。最后由 (C) 得 $2u_1^2 = \frac{2}{3}$，即 $u_1^2 = \frac{1}{3}$；(D) 随之自动成立。所以

$$\boxed{a_1 = a_2 = 1, \qquad u_1 = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \quad u_2 = \tfrac{1}{\sqrt{3}}}$$

（或把 u_1 与 u_2 对调），也就是说，

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{P}(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{P}\!\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) + \mathrm{P}\!\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{对每一个三次多项式P.}$$

以上论证同时说明，除了重新标记之外，这是唯一的选择。



无论画的是哪一个三次多项式，阴影部分的面积都等于两条虚线高度之和。

验算

- $\mathrm{P}(t) = t^2$：积分为 $\frac{2}{3}$，而公式给出 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$。
- $\mathrm{P}(t) = 1 + t + t^2 + t^3$：积分为 $2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$；公式给出 $2 + 2\cdot\frac{1}{3} = \frac{8}{3}$，因为奇次项互相抵消。
- 这条公式对 t^4 并不准确：它给出 $2\cdot\frac{1}{9} = \frac{2}{9}$，而积分却是 $\frac{2}{5}$。可见三次多项式确实是极限。
- 数值上，以 10^4 个随机三次多项式测试，两边相差不超过 10^{-14}。

常见错误

- 一开始就假设对称（$u_2 = -u_1$，$a_1 = a_2$）。这样做可以很快得到正确答案，却没有证明其他选择都行不通；上面的因式分解则做到了这一点。
- 在除以某个量时，忘记考虑 $a_1 = 0$ 或 $u_1 = u_2$ 的情况。
- 只用 $\mathrm{P}(t) = 1$ 和 t^2 来检验：迫使对称性出现的，正是奇次条件 (B) 和 (D)。

STEP 之外

这就是两点高斯求积法（Gaussian quadrature）。只要适当选取 n 个点和相应的权（weights），就可以准确地求出所有次数不超过 $2n-1$ 的多项式的积分，是 n 个等距点所能做到的两倍。最佳的点是勒让德多项式（Legendre polynomials）的零点（这里是 $\frac{1}{2}(3t^2-1)$，其零点为 $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$），而这些多项式在 $[-1,1]$ 上是正交（orthogonal）的。正交多项式会在大学一年级的数值分析（numerical analysis）和求解微分方程（differential equations）时出现；Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教材）在级数解一章中会讨论勒让德方程。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。