详细解答

STEP I 1997，第 6 题

纯数学 · 以积分估计 π 的界限

> **STEP I 1997，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q6

本题在 *Beyond STEP* 第 4.3 节22/7 大于 π 中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch04/twenty-two-sevenths.html

关键思路

被积函数（integrand）是一个有理函数（rational function），其分子的次数高于分母，所以第一步是以 x^2+1 作多项式除法（polynomial division）：得出一个多项式商式，积分起来毫不费力，再加上一个常数余数除以 $1+x^2$，积分后得到反正切（arctangent）。π 正是由这个反正切而来。至于最后的不等式，则利用在 $[0,1]$ 上 $1 \le 1+x^2$，把被积函数与 $x^4(1-x)^4$ 本身作比较。

解答

除法

以二项式定理（binomial theorem）展开，

$$x^4(1-x)^4 = x^4(1-4x+6x^2-4x^3+x^4) = x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4.$$

我们以 x^2+1 作除式，每次消去首项：

$$\begin{aligned}
x^8-4x^7+6x^6-4x^5+x^4 &= x^6(x^2+1)+\left(-4x^7+5x^6-4x^5+x^4\right)\\
-4x^7+5x^6-4x^5+x^4 &= -4x^5(x^2+1)+\left(5x^6+x^4\right)\\
5x^6+x^4 &= 5x^4(x^2+1)+\left(-4x^4\right)\\
-4x^4 &= -4x^2(x^2+1)+4x^2\\
4x^2 &= 4(x^2+1)-4.
\end{aligned}$$

把 x^2+1 的各个倍数合并，

$$x^4(1-x)^4=\left(x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4\right)(x^2+1)-4,$$

所以

$$a_6=1,\quad a_5=-4,\quad a_4=5,\quad a_3=0,\quad a_2=-4,\quad a_1=0,\quad a_0=4,\quad b=-4.$$

快速验算一下：当 $x=0$ 时，右方是 $4\cdot1-4=0$；当 $x=1$ 时，右方是 $(1-4+5-4+4)\cdot2-4=0$，两次都与左方相符。

等于 $\frac{22}{7}-\pi$ 的积分

把恒等式两边除以 $1+x^2$（它永不为零），

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}=x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4-\frac{4}{1+x^2}.$$

在 $[0,1]$ 上逐项积分，并利用 $\int\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\arctan x$，

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[\tfrac17x^7-\tfrac23x^6+x^5-\tfrac43x^3+4x\right]_0^1-4\Big[\arctan x\Big]_0^1\\
&= \tfrac17-\tfrac23+1-\tfrac43+4\;-\;4\cdot\tfrac{\pi}{4}\\
&= \tfrac17+3-\pi\\
&= \frac{22}{7}-\pi,
\end{aligned}$$

因为 $-\frac23-\frac43=-2$ 及 $\arctan1=\frac{\pi}{4}$。这就是所求的结果。

$x^4(1-x)^4$ 的积分

利用开首的展开式，

$$\int_0^1x^4(1-x)^4\,\mathrm{d}x=\tfrac15-\tfrac46+\tfrac67-\tfrac48+\tfrac19.$$

通分至公分母 $2520=5\cdot7\cdot8\cdot9$，

$$\frac{504-1680+2160-1260+280}{2520}=\frac{4}{2520}=\frac{1}{630}.$$

π 的上下界

设 $f(x) = x^4(1-x)^4$，则当 $0 < x < 1$ 时 $f(x) > 0$。

上界（*upper bound*）。在 $(0,1)$ 上，被积函数 $f(x)/(1+x^2)$ 严格为正且连续（continuous），所以它在 $[0,1]$ 上的积分严格为正。因此 $\frac{22}{7} - \pi > 0$，即 $\pi < \frac{22}{7}$。

下界（*lower bound*）。当 $0 < x < 1$ 时，$1 + x^2 > 1$，而由于 $f(x) > 0$，

$$\frac{f(x)}{1+x^2} < f(x).$$

想一想 为甚么两个积分之间的不等式是严格的，而不仅是 $\leq$?

两者之差 $f(x) - \dfrac{f(x)}{1+x^2} = \dfrac{x^2 f(x)}{1+x^2}$ 在整个开区间 $(0,1)$ 上连续且严格为正，所以它在 $[0,1]$ 上的积分严格为正。（一个非负的连续函数，只要在某处为正，其积分便为正。）因此

$$\frac{22}{7} - \pi = \int_0^1 \frac{f(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x < \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{630},$$

移项后得 $\pi > \frac{22}{7} - \frac{1}{630}$。结合两个界，

$$\frac{22}{7} > \pi > \frac{22}{7} - \frac{1}{630},$$

这正是所要证明的。

验算

- 以数值计算，$\frac{22}{7} - \pi \approx 0.0012645$，而对第一个积分使用辛普森法则（Simpson's rule），所得的值准确至小数点后十二位都相同。
- $\frac{1}{630} \approx 0.0015873$，明显大于 0.0012645；上下界表示 $3.141270 < \pi < 3.142857$，而事实上 $\pi \approx 3.141593$。
- $\frac{1}{630}$ 这个值亦可由贝塔积分（beta integral）公式 $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x = \dfrac{m!\,n!}{(m+n+1)!}$ 得出：它给出 $\dfrac{4!\,4!}{9!} = \dfrac{576}{362880} = \dfrac{1}{630}$。

常见错误

- 在长除法中漏掉 a_3 和 a_1 这两个零系数：每一个幂次都要保留在原位，否则余数便会算错。
- 写成 $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\ln 2$（与 $\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 混淆）；正确答案是 $4\arctan 1 = \pi$。

- 在最后一步只证明了 $\leq$。题目要求的是严格不等式（strict inequality），所以必须说明为何两个积分不可能相等。

STEP 之外

这个优美的积分在二十世纪才被发现，它一举说明了课本上的近似值 $\frac{22}{7}$ 高估了 π。同样的想法——把 $x^n(1-x)^n$ 乘以简单的函数后积分，再证明结果虽小但为正——正是证明 π 和 e 是无理数（irrational）的经典方法的核心：介乎 0 与 1 之间的整数并不存在。形如 $\int_0^1 x^m(1-x)^n \,\mathrm{d}x$ 的积分是贝塔函数（beta function）的值，在大学一年级的分析和概率课程中便会遇到。至于如何严谨地处理积分之间的严格不等式，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。