详细解答

STEP I 1997，第 5 题

纯数学 · 几何中的向量

STEP I 1997，第 5 题

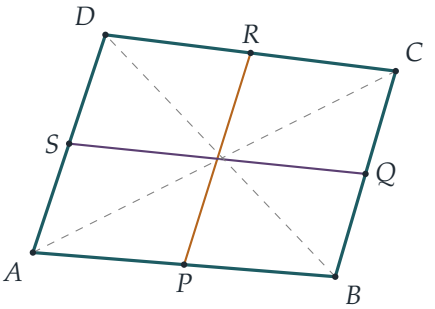
继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s1-q5

关键思路

长度的平方就是点积（dot product），中点（mid-point）就是平均，所以用位置向量（position vector）便可把整条恒等式化为代数运算。有用的窍门是看出等式两边其实都暗藏着对角线（diagonal）AC 和 BD：只要把每个差都用 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ 表示出来，恒等式便水到渠成。至于其后的推论，只需用到四根杆的长度永远不变这一事实。

解答



设 A, B, C, D 相对于任意原点的位置向量为 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$，并记 $|\mathbf{x}|^2 = \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}$。各中点为

$$\mathbf{p} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}), \quad \mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c}), \quad \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}), \quad \mathbf{s} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a}).$$

四条边

把每一项按 $|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{y}|^2 - 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}$ 展开，平方项 $|\mathbf{a}|^2, \ldots, |\mathbf{d}|^2$ 在两边各出现一次，互相抵消，余下

$$\begin{aligned}|AB|^2 + |CD|^2 - |AD|^2 - |BC|^2 &= -2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - 2\,\mathbf{c}\cdot\mathbf{d} + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{d} + 2\,\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\\ &= 2(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}).\end{aligned}$$

（把 $(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b})$ 乘开，即可核实这个因式分解。）用文字来说，这就是 $-2\,\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$。

两条中点连线

我们有

$$\overrightarrow{PR} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d}-\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{u}, \qquad \overrightarrow{QS} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{d}+\mathbf{a}-\mathbf{b}-\mathbf{c}) = \tfrac{1}{2}\mathbf{v},$$

姑且这样记。

> ? **想一想** 怎样才可以求出 $|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2$，而不必展开两个四项式的平方？

利用向量的平方差公式（difference of two squares）：$|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\mathbf{v})$，此式成立是因为 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$。这里

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = 2(\mathbf{d}-\mathbf{b}), \qquad \mathbf{u}-\mathbf{v} = 2(\mathbf{c}-\mathbf{a}),$$

所以

$$|PR|^2 - |QS|^2 = \tfrac{1}{4}(|\mathbf{u}|^2 - |\mathbf{v}|^2) = (\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}.$$

合并结果

把四条边的结果加上中点连线结果的两倍，

$$\begin{aligned}&|AB|^2 + |CD|^2 - |AD|^2 - |BC|^2 + 2(|PR|^2 - |QS|^2)\\ &\quad = 2(\mathbf{a}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) + 2(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{b}) = 0,\end{aligned}$$

移项后得

$$|AB|^2 + |CD|^2 + 2|PR|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 + 2|QS|^2,$$

这正是所要证明的。我们从没有用过凸性（convexity），甚至没有用过各点共面这一条件，所以恒等式对任意四点都成立，包括折叠过来、以致其中两根杆相交的四边形。

推论

把恒等式移项，

$$|PR|^2 - |QS|^2 = \tfrac{1}{2}(|AD|^2 + |BC|^2 - |AB|^2 - |CD|^2).$$

各杆都是刚性的,所以无论接合处怎样屈曲,右边的四个长度永远不变。因此 $|PR|^2 - |QS|^2$ 在整个运动过程中是常数。换句话说，两条对角线的纯量积（scalar product）$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ 保持不变，尽管对角线本身的长度和方向都在改变。

验算

- 对于边长为 a 和 b 的长方形，$|AB| = |CD| = a$ 而 $|AD| = |BC| = b$，而 PR 和 QS 连接对边的中点，所以 $|PR| = b$ 及 $|QS| = a$。恒等式两边都等于 $2a^2 + 2b^2$。
- 对于菱形（rhombus），四条边全部相等，所以推论指出在任何位置都有 $|PR| = |QS|$。事实上，菱形的对角线互相垂直，所以 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$。
- 数值上，在 10^5 个随机四边形上，恒等式的误差都在 10^{-12} 之内。对于一个 $|AB| = 3$、$|BC| = 4$、$|CD| = 5$、$|DA| = 6$ 的连杆机构（linkage），屈曲经过约 200 个位置，$|PR|^2 - |QS|^2$ 始终保持在 $\frac{1}{2}(36 + 16 - 9 - 25) = 9$。

常见错误

- 搞错哪些边与哪条连线配对：PR 连接 AB 和 CD 的中点，而在恒等式中与 PR 放在一起的正是这两条边。
- 采用坐标设置，例如把 A 放在原点、B 放在坐标轴上，却忘记了一般的四边形需要其余各点完全自由。用向量便可免去这些繁琐的处理。

STEP 之外

P, Q, R, S 四点总是构成一个平行四边形（瓦里尼翁定理，Varignon's theorem），而 PR、QS 就是它的对角线。这里的恒等式与平行四边形恒等式（parallelogram law）$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 2|\mathbf{u}|^2 + 2|\mathbf{v}|^2$ 是近亲；在大学一年级的线性代数课程中，后者恰好刻划了那些由内积（inner product）导出的范数（norm）。机构运动时某个量保持不变，这种量称为不变量（invariant），这个想法在数学中反复出现。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）是一个好去处，可以看到点积和内积如何得到严谨而完整的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。