详细解答

STEP I 1997，第 4 题

纯数学 · 绝对值方程

STEP I 1997，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s1-q4

关键思路

每个绝对值（modulus）项只会在其内部为零之处改变公式，因此四个“临界点”（critical points）$x = -1, 0, 1, 2$ 把实数线分成五个区间（interval）。在每个区间上，每个绝对值都可以换成符号确定的普通括号，左边于是变成线性函数（linear function），方程便容易处理。唯一要留意的是：线性方程的根，必须落在你正在处理的那个区间内才算数。

解答

设 $L(x) = |x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2|$。回想当 $t \geq 0$ 时 $|t| = t$，而当 $t < 0$ 时 $|t| = -t$。我们由右至左逐个区间处理。

$x \geq 2$。四个绝对值的内部全部非负，所以

$$\begin{aligned} L(x) &= (x+1) - x + 3(x-1) - 2(x-2) \\ &= x + 1 - x + 3x - 3 - 2x + 4 = x + 2. \end{aligned}$$

方程变成 $x + 2 = x + 2$，对每一个 $x \geq 2$ 都成立。所以整个区间 $x \geq 2$ 都是解。

? **想一想** 方程变成了恒等式（identity）。我们是否在代数运算上出了错?

没有。当 $x \to \infty$ 时，各绝对值中 x 的系数加起来是 $1 - 1 + 3 - 2 = 1$，常数项加起来是 $1 - 0 - 3 + 4 = 2$，恰好与右边的 $x + 2$ 吻合。含绝对值的方程完全可以有一整个区间的解，而题目说“求所有解”，正是暗示可能会出现这种情况。快速检验一下：在 $x = 3$ 时，$L(3) = 4 - 3 + 6 - 2 = 5 = 3 + 2$。

$1 \le x < 2$。 此时 $x-2<0$，所以 $|x-2| = -(x-2)$，而

$$L(x) = (x+1) - x + 3(x-1) + 2(x-2) = 5x - 6.$$

于是 $5x-6 = x+2$ 给出 $x=2$，它不在 $[1,2)$ 内。（它确是一个解，但我们已经把它计算在内。）没有新的解。

$0 \le x < 1$。 此时 $x-1<0$ 亦成立，所以

$$L(x) = (x+1) - x - 3(x-1) + 2(x-2) = -x.$$

于是 $-x = x+2$ 给出 $x=-1$，不在 $[0,1)$ 内。没有解。

$-1 \le x < 0$。 此时还有 $|x| = -x$，所以

$$L(x) = (x+1) + x - 3(x-1) + 2(x-2) = x.$$

方程 $x = x+2$ 根本没有解。

$x < -1$。 四个绝对值的内部全部为负，所以

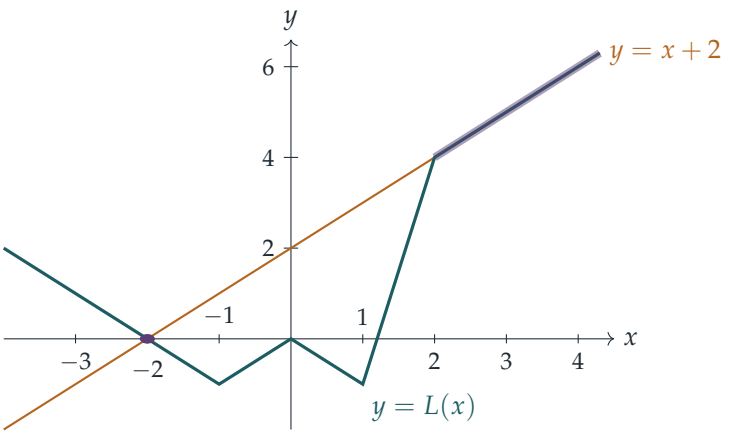
$$L(x) = -(x+1) + x - 3(x-1) + 2(x-2) = -x - 2.$$

于是 $-x-2 = x+2$ 给出 $x=-2$, 而 $-2<-1$, 所以这是一个真正的解。验算：$L(-2) = 1-2+9-8 = 0 = -2+2$。

结论。 方程的解是

$$x = -2 \qquad \text{以及所有} x \ge 2.$$

图像显示了原因：$y = L(x)$（蓝绿色）是由线段组成的折线，它与直线 $y = x+2$（琥珀色）在 $x=-2$ 处相交一次，然后由 $x=2$ 起与该直线重合。



验算

代入几个数值：$L(-2) = 0 = -2 + 2$，$L(5) = 6 - 5 + 12 - 6 = 7 = 5 + 2$，而在 $x = 0$ 时得 $L(0) = 1 + 3 - 4 = 0 \neq 2$。以电脑用精确分数运算，在 100,000 个随机点上确认了 L 的五条线性公式；并发现在 $[-20, 20]$ 上步长为 0.01 的格点中，方程恰好在 $x = -2$ 以及所有 $x \geq 2$ 的格点上成立，其余各处均不成立。

常见错误

- 在 $x \geq 2$ 时得到 $x + 2 = x + 2$，却写“无解”或“有无穷多个解，所以一定是哪里出了错”，而没有看出这是一整个区间的解。
- 接受了像 $x = -1$（来自 $0 \leq x < 1$）这类落在所考虑区间之外的根。
- 遗漏了最外面的区域 $x < -1$，而孤立解 $x = -2$ 正正就在那里。

STEP 之外

像 L 这样的函数是*分段线性*（piecewise linear）的：它连续（continuous），并且在有限多个“角点”之间是线性的。这类函数是线性规划（linear programming）和最优化（optimisation）的核心，在那里，求绝对值之和 $\sum |x - a_i|$ 的最小值会引出中位数（median）而非平均数（mean）。它们也是“连续但在孤立点上不可微（not differentiable）”的函数的第一个例子，这个主题在 Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析学入门教材）中有仔细的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。