详细解答

STEP I 1997，第 3 题

纯数学 · 幂与个位数字

> **STEP I 1997，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q3

关键思路

动笔之前，先把 a_7 写成 3 的单一个幂（power）：把 3 的幂取立方，只是把指数（exponent）乘以三。之后各部分其实是就同一个庞大的数提出不同的问题。个位数字（units digit）只取决于指数模（modulo）4 的值，因为 3 的幂的个位数字以周期（period）4 循环出现。大小的界只需要与 10 的幂作一个粗略的比较。最后一部分则建基于这个界：a_7 极大，$1/a_7$ 便小得可以忽略。

解答

首先求出封闭形式（closed form）。若 $a_n = 3^k$，则 $a_{n+1} = (3^k)^3 = 3^{3k}$，所以每一步指数都乘以 3。由 $a_1 = 3^1$ 出发，用归纳法（induction）可得

$$a_n = 3^{3^{n-1}}, \qquad \text{所以} \qquad a_7 = 3^{3^6} = 3^{729}.$$

第 (i) 部分

乘积的个位数字只取决于各因数的个位数字。因此要追踪 3^k 的个位数字，只需把上一个个位数字乘以 3，然后只保留个位：

k	1	2	3	4	5	⋯
个位数字：3^k	3	9	7	1	3	⋯

到 $k = 4$ 时个位数字回到 1，此后 $3, 9, 7, 1$ 这个规律便以周期 4 重复出现。（换句话说，$3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$，所以 $3^{4m+r} \equiv 3^r \pmod{10}$。）

? **想一想** 怎样不用长除法求出 729 模 4 的值?

由于 $3 \equiv -1 \pmod 4$, 我们有 $3^6 \equiv (-1)^6 = 1 \pmod 4$。(直接计算: $729 = 4 \times 182 + 1$。) 因此 $3^{729} = 3^{4\cdot 182+1}$ 的个位数字与 3^1 的相同，即

故a_7 的个位数字是3.

第 (ii) 部分

把指数每三个分成一组：$729 = 3 \times 243$，所以

$$a_7 = 3^{729} = \left(3^3\right)^{243} = 27^{243} > 10^{243} \geq 10^{100},$$

当中用到 $27 > 10$（以及正数取正数次幂后大小次序不变这个事实)。因此 $a_7 \geq 10^{100}$，正如所求。这个界远远谈不上紧：事实上 a_7 有 348 位数字。

第 (iii) 部分

把分数拆开：

$$\frac{a_7 + 1}{2a_7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a_7}.$$

由于 $a_7 > 0$，第二项是正数。根据第 (ii) 部分，它同时极小：

$$0 < \frac{1}{2a_7} \leq \frac{1}{2 \times 10^{100}} < 10^{-100}.$$

因此

$$0.5 < \frac{a_7 + 1}{2a_7} < 0.5 + 10^{-100} < 0.505.$$

凡是严格介乎 0.5 与 0.505 之间的数，取至小数点后两位都是 0.50：小数点后第三位是 0，远远未到需要进位的 5。所以

$$\frac{a_7 + 1}{2a_7} = 0.50 \text{ （准确至小数点后两位)。}$$

事实上，它的小数展开式以 0.5000... 开始，在 5 之后至少有 100 个零。

验算

电脑可以精确地处理 3^{729}。把 3 连续取立方六次，可确认 $a_7 = 3^{729}$，这个数有 348 位数字，个位数字是 3，并且 $27^{243} = 3^{729} > 10^{243}$。用精确的分数运算，可确认 $\frac{a_7+1}{2a_7}$ 严格介乎 $\frac{1}{2}$ 与 $\frac{1}{2} + 10^{-100}$ 之间。你也可以用较小的例子检验第 (i) 部分的方法：$a_2 = 3^3 = 27$ 的指数是 $3 \equiv 3 \pmod 4$，由此预测个位数字是 7，结果确实如此。

常见错误

- 把 a_7 看成 $3^{3\cdot 7}$ 或 3^{18}，而不是 3^{3^6}：每一步是把指数乘以 3，而不是加 3。

- 把指数对模 10 化简，而不是对模 4 化简。个位数字以周期 4 循环，所以起作用的是指数模 4 的值。
- 在第 (iii) 部分只写“0.5”而不加任何理据。“准确至两位小数”指的是 0.50，而且你需要用上下界说明这个值不可能达到 0.505。

STEP 之外

第 (i) 部分让你初尝模算术（modular arithmetic）和欧拉定理（Euler's theorem）的滋味：$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$，是因为 $\varphi(10) = 4$。数论学家要找出像 3^{3^3} 这类巨大幂塔（power tower）的末几位数字，靠的正是逐层重复运用这种化简。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 从零开始建立同余（congruence）和元素的阶（order of an element）的理论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。