详细解答

STEP I 1997，第 2 题

纯数学 · 反三角函数的导数

STEP I 1997，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s1-q2

关键思路

在第 (i) 部分，f 的导数（derivative）会化简为零，所以 f 是常数，但只限于它有定义的每一个区间（interval）之内：点 $x = -1$ 把实数线分成两段，而两边的常数并不相同。在第 (ii) 部分，先求 x 对 y 的导数，再把结果倒转过来会较为容易；功夫在于把 $\sin y^2$ 和 $\cos y^2$ 改写成以 x 和 y 表示的式子，而 y 的取值范围正正在这里起作用。

解答

第 (i) 部分

这个函数对所有 $x \neq -1$ 都有定义。设 $u = \dfrac{1-x}{1+x}$。由商法则（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}, \qquad 1+u^2 = \frac{(1+x)^2+(1-x)^2}{(1+x)^2} = \frac{2(1+x^2)}{(1+x)^2}.$$

利用 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1} u = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$（链式法则（chain rule）），

$$\begin{aligned} \mathrm{f}'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{(1+x)^2}{2(1+x^2)} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0 \qquad (x \neq -1). \end{aligned}$$

想一想 $\mathrm{f}'(x) = 0$ 是否表示 f 在所有地方都等于同一个常数?

不是。导数为零只能保证函数在一个区间上是常数（这是由中值定理（mean value theorem）得出的）。f 的定义域（domain）是 $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$，即两个区间，所以 f 在

每一段上都是常数，而这两个常数可以不同。要求出每个常数，可以代入一个方便计算的点，或者取极限（limit）。

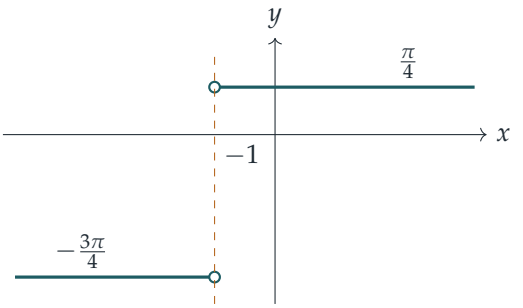
当 $x > -1$： 取 $x = 0$。于是 $\mathrm{f}(0) = \tan^{-1} 0 + \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$。

当 $x < -1$： 令 $x \to -\infty$。这时 $\tan^{-1} x \to -\frac{\pi}{2}$，而 $\dfrac{1-x}{1+x} \to -1$，所以 $\tan^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right) \to -\frac{\pi}{4}$。由于 f 在这个区间上是常数，这个常数就等于该极限，即 $-\frac{3\pi}{4}$。（另一个做法：取 $x = -\sqrt{3}$，得 $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -(2+\sqrt{3}) = -\tan\frac{5\pi}{12}$，所以 $\mathrm{f}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{5\pi}{12} = -\frac{3\pi}{4}$。）

因此

$$\mathrm{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}, & x > -1, \\ -\dfrac{3\pi}{4}, & x < -1. \end{cases}$$

函数在 $x = -1$ 处出现大小为 π 的跳跃，是因为 $\dfrac{1-x}{1+x}$ 在该处由 $-\infty$ 直冲到 $+\infty$，于是它的反正切（inverse tangent）便由 $-\frac{\pi}{2}$ 跃升至 $\frac{\pi}{2}$。



第 (ii) 部分

利用积法则（product rule）和链式法则，求 $x = y\sin y^2$ 对 y 的导数：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \sin y^2 + 2y^2 \cos y^2.$$

现在把两个三角函数项都用 x 和 y 表示。

- 由于 $y > 0$，可以除以 y：$\sin y^2 = \dfrac{x}{y}$。
- 由于 $0 < y^2 < \frac{\pi}{2}$，有 $\cos y^2 > 0$，所以取正平方根：

$$\cos y^2 = \sqrt{1 - \sin^2 y^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{y^2 - x^2}}{y},$$

其中最后一步用到 $\sqrt{y^2} = y$，这是因为 $y > 0$ 才成立。

所以

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x}{y} + 2y\sqrt{y^2 - x^2} = \frac{x + 2y^2\sqrt{y^2 - x^2}}{y}.$$

这个式子严格为正，因为 $x > 0$、$y > 0$，而平方根是非负的。因此可以把它倒转（反函数法则（inverse function rule）$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，在 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \neq 0$ 时成立）：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x + 2y^2\sqrt{y^2 - x^2}},$$

这正是所要证明的结果。

想一想 为甚么题目坚持要 $0 < y < (\pi/2)^{1/2}$?

没有这个条件，$\cos y^2$ 就有可能是负数，而正确的公式在平方根前面便要有一个负号。这个限制同时令 $y \sin y^2$ 在这个范围内严格递增（strictly increasing）（上面求得的导数是正数），由 0 上升至 $(\pi/2)^{1/2}$，所以在 $0 < x < (\pi/2)^{1/2}$ 内的每一个 x 都恰好对应一个 y，y 才真正是 x 的函数。

验算

- 第 (i) 部分：$\mathrm{f}(1) = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1} 0 = \frac{\pi}{4}$，而 $\mathrm{f}(-3) = \tan^{-1}(-3) + \tan^{-1}(-2) \approx -1.2490 - 1.1071 = -2.3562 \approx -\frac{3\pi}{4}$。我们在 10,000 个随机点上验证过这两个常数。
- 第 (ii) 部分：当 $x = 0.5$，以数值方法解 $y \sin y^2 = 0.5$ 得 $y \approx 0.81355$，而公式给出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \approx 0.60284$，与用数值方法求得的反函数的有限差分（finite difference）导数吻合。
- 在 $x = 0$ 附近，$y \sin y^2 \approx y^3$，所以 $y \approx x^{1/3}$，且 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \approx \frac{1}{3y^2}$；公式给出 $y/(y^3 + 2y^3) = \frac{1}{3y^2}$，两者一致。

常见错误

- 断定对所有 x 都有 $\mathrm{f}(x) = \frac{\pi}{4}$，忘记了 $x = -1$ 把定义域分成两部分。
- 写出 $\cos y^2 = \pm\sqrt{\cdots}$，却没有说明为甚么应取正根。

STEP 之外

$\mathrm{f}' = 0$ 只能在定义域的各个连通（connected）部分上得出常数，这是中值定理的推论，而中值定理是大学分析（analysis）课程中最早遇到的重要结果之一。第 (ii) 部分是反函数定理（inverse function theorem）的一个入门例子：导数不为零的函数可以在局部求反

函数，而反函数的导数就是原来导数的倒数。Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析学入门教材）对这两个课题都有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。