详细解答

STEP I 1997，第 14 题

概率与统计 · 期望成本的最小化

STEP I 1997，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s1-q14

关键思路

成本 T 是随机变量（random variable）X 的函数，所以它的期望值（expectation）就是该函数乘以概率密度函数（density）后的积分。在 $x = y$ 处把积分拆开，便可将 $\mathrm{E}(T)$ 写成 y 的普通函数；之后求其最小值只是大学一年级程度的微积分练习：求导、令导数为零，再检查驻点（stationary point）确实是极小值。

解答

我们取 $y \geq 0$，因为准备工作的份量为负数并无意义。记 $T = g(X)$，其中

$$g(x) = \begin{cases} y & x \leq y, \\ y + r + s(x - y) & x > y. \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(T) &= \int_0^\infty g(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty y\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_y^\infty (r + s(x - y))\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

这里我们把成本 y 抽了出来，因为无论发生甚么事都要支付这笔费用。由于密度函数的积分为 1，第一个积分等于 y。

至于第二个积分，作代换 $u = x - y$，则 $\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^{-u}$，而 u 由 0 变到 ∞：

$$\begin{aligned}\int_y^\infty (r + s(x-y))\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \mathrm{e}^{-y}\int_0^\infty (r+su)\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \\ &= \mathrm{e}^{-y}\Big(r\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u + s\int_0^\infty u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u\Big) \\ &= \mathrm{e}^{-y}(r+s),\end{aligned}$$

其中用到 $\int_0^\infty u\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = [-u\mathrm{e}^{-u}]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = 1$（分部积分法, integration by parts）。因此

$$C(y) = \mathrm{E}(T) = y + (r+s)\,\mathrm{e}^{-y}.$$

想一想 有没有方法不用积分就能看出 $\mathrm{e}^{-y}(r+s)$ 这个因子?

有。水灾造成损失的概率是 $\mathrm{P}(X > y) = \mathrm{e}^{-y}$。在已知损失发生的条件下，超出的部分 $X - y$ 仍然服从平均值为 1 的指数分布（exponential distribution），因为指数分布具有无记忆性（memoryless），所以损失的期望值是 $r + s\cdot 1$。两者相乘便得 $(r+s)\mathrm{e}^{-y}$。

现在求最小值。求导得

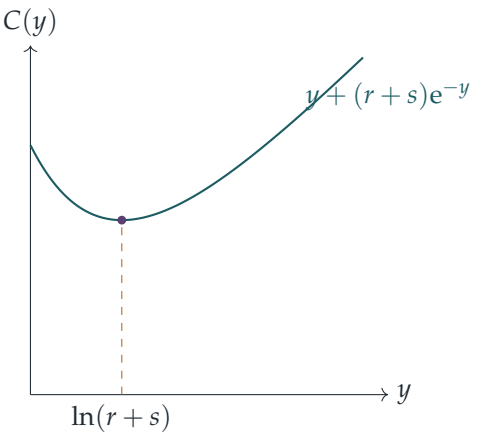
$$C'(y) = 1 - (r+s)\mathrm{e}^{-y}, \qquad C''(y) = (r+s)\mathrm{e}^{-y} > 0.$$

所以 $C'(y) = 0$ 当且仅当 $\mathrm{e}^y = r+s$，即 $y = \ln(r+s)$。由于对所有 y 都有 $C'' > 0$，C 是凸函数（convex），C' 递增，因此 C 在 $y < \ln(r+s)$ 时递减，在 $y > \ln(r+s)$ 时递增。故此这个驻点就是全域最小值（global minimum），而要令总成本的期望值最小，应取

$$y = \ln(r+s),$$

这正是所求。成本期望值的最小值为 $C(\ln(r+s)) = \ln(r+s) + 1$。

以上需要 $\ln(r+s) \geq 0$，即 $r+s \geq 1$，题目隐含了这个假设。若 $r+s < 1$，则对每个 $y \geq 0$ 都有 $C'(y) > 0$，所以最佳选择是 $y = 0$：损失实在太便宜，根本不值得作任何准备。



（草图以 $r+s=3$ 绘画。）

验算

- 当 $y=0$ 时，我们必定要支付损失，而 $\mathrm{E}(T)=r+s\,\mathrm{E}(X)=r+s$，与 $C(0)$ 吻合。
- 取 $r=2$、$s=3$，公式给出 $y=\ln 5\approx 1.609$，最小成本为 $1+\ln 5\approx 2.609$；对 $C(y)$ 作精细的网格搜索，找到的最小值点相同；另外在 $y=1$ 下模拟 4×10^5 年，得出平均成本为 2.844，而公式给出的值是 $1+5\mathrm{e}^{-1}\approx 2.839$。
- 当 $r+s$ 增大时，y 亦随之增加：水灾的代价愈高，就愈值得多作准备，这与常理相符。

常见错误

- 忘记准备成本 y 是每一年都要支付的，而不是只在 $X\le y$ 时才支付。
- 对 $sx\,\mathrm{e}^{-x}$ 积分时漏掉了 $-sy\,\mathrm{e}^{-x}$ 一项，结果得出 $\mathrm{e}^{-y}(r+s+sy)$ 而不是 $\mathrm{e}^{-y}(r+s)$。
- 找到驻点后，没有证明它是极小值。

STEP 之外

这是不确定情况下作决策（decision-making under uncertainty）的一个小例子：选择一个行动，使损失的期望值最小。同样的结构，即在一笔确定的成本与一项预期的惩罚之间取得平衡，正是运筹学（operations research）中“报童问题”（newsvendor problem）以及统计学中贝叶斯决策（Bayes decisions）这个概念的基础。上文用到的无记忆性，在连续分布之中刻划了指数分布的特征；Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门教科书）涵盖了这个性质，以及随机变量函数的期望值。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。