详细解答

STEP I 1997，第 13 题

概率与统计 · 条件概率

STEP I 1997，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/97-s1-q13

关键思路

Blond 先生应否开灯，只取决于等着他的是哪一种陷阱，所以整道题归结为一个条件概率（conditional probability）：在没有金丝雀的情况下，陷阱是森蚺而不是炸弹的机会。刺客是谁之所以重要，只因为这会影响所用的武器。因此，我们用全概率公式（law of total probability）把两层（先是刺客，然后是武器）结合起来，以“没有金丝雀”为条件，再比较两种做法的死亡风险。

解答

设置

设 M_i 为 i 先生布下陷阱的事件，其中 $i = 1, 2, 3, 4$，并设 A、B 和 C 分别为陷阱是森蚺、炸弹或金丝雀的事件。已知

$$P(M_i) = \frac{i}{10}, \qquad P(A \mid M_i) = \frac{i+1}{10}, \quad P(B \mid M_i) = \frac{i}{10}, \quad P(C \mid M_i) = \frac{9-2i}{10}.$$

这些数值互相吻合：$\frac{1+2+3+4}{10} = 1$，而且对每个 i，三个武器概率均为非负，其和为 $\frac{(i+1)+i+(9-2i)}{10} = 1$。牵涉其中的刺客恰好一名，武器亦恰好一种，所以事件 $M_i \cap A$、$M_i \cap B$ 和 $M_i \cap C$ 构成所有可能情况的一个划分（partition）。

寂静告诉他甚么

根据全概率公式，

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(M_i)P(A\mid M_i)=\frac{1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5}{100}=\frac{40}{100},$$
$$P(B)=\sum_{i=1}^{4}P(M_i)P(B\mid M_i)=\frac{1+4+9+16}{100}=\frac{30}{100}.$$

所以 $P(C')=P(A)+P(B)=\frac{70}{100}$。（验算一下：$P(C)=\frac{7+10+9+4}{100}=\frac{30}{100}$。）

想一想 我们需要找出现在哪一名刺客的可能性最大吗?

不需要。听不到歌声确实会改变每名刺客的可能性，但死亡风险只取决于武器。由于 $A\subseteq C'$ 及 $B\subseteq C'$，以 C' 为条件只是把这两个概率按比例重新缩放：

$$P(A\mid C')=\frac{P(A)}{P(C')}=\frac{40}{70}=\frac{4}{7},\qquad P(B\mid C')=\frac{P(B)}{P(C')}=\frac{30}{70}=\frac{3}{7}.$$

有关刺客的信息已经包含在这两个数之中。

比较两个选择

设 K 为 Blond 先生被杀的事件。一旦以 C' 为条件，陷阱不是森蚺就是炸弹，而他的命运只取决于陷阱和他的选择。

开灯。炸弹有 $\frac{1}{2}$ 的概率杀死他，森蚺则有 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ 的概率杀死他。所以

$$P(K\mid C',\text{开灯})=\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{9}{42}+\frac{8}{42}=\frac{17}{42}.$$

不开灯。炸弹必定不会杀死他，森蚺则有 $\frac{1}{2}$ 的概率杀死他。所以

$$P(K\mid C',\text{不开灯})=\frac{3}{7}\cdot 0+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{7}=\frac{12}{42}.$$

由于 $\frac{12}{42}<\frac{17}{42}$，**Blond 先生应该不开灯便进入寓所**。这样他的生还机会是 $\frac{5}{7}$（约 71%），而开灯的话则是 $\frac{25}{42}$（约 60%）。

原因在于：森蚺虽然是较有可能出现的陷阱，但开灯真正令情况恶化的却是炸弹。开灯把森蚺的风险由 $\frac{1}{2}$ 降至 $\frac{1}{3}$，却把炸弹的风险由 0 升至 $\frac{1}{2}$。陷阱是森蚺的概率为 $\frac{4}{7}$，开灯可减少 $\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{4}{42}$ 的风险；陷阱是炸弹的概率为 $\frac{3}{7}$，开灯却要付出 $\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{42}$ 的代价。代价较大。

验算

- 在他细听之前，开灯的风险是 $\frac{30}{100}\cdot\frac{1}{2}+\frac{40}{100}\cdot\frac{1}{3}$，不开灯的风险是 $\frac{40}{100}\cdot\frac{1}{2}$。这正是上面的答案乘以 $\frac{7}{10}$，理应如此，因为金丝雀对两边的比较都毫无影响。
- 只要 $p=P(A\mid C')$ 满足 $\frac{1}{2}p<\frac{1}{2}(1-p)+\frac{1}{3}p$，即只要 $p<\frac{3}{4}$，不开灯的策略便较佳。这里 $p=\frac{4}{7}$，远低于这个数值。
- 模拟 10^6 个晚上，得出开灯时的死亡率约为 0.404，不开灯时约为 0.286，与 $\frac{17}{42}\approx 0.405$ 及 $\frac{2}{7}\approx 0.286$ 吻合。

常见错误

- 忘记以“没有金丝雀”为条件，直接把 $P(A)=0.4$ 和 $P(B)=0.3$ 当作全部事实来计算。得出的建议相同，但死亡概率却是错的。
- 混淆生还与死亡：开灯时森蚺的数字是 $\frac{2}{3}$ 的生还机会，所以死亡机会是 $\frac{1}{3}$。
- 把各名刺客当作可能性均等，或者忽略刺客这一层，直接把武器概率取平均。

STEP 之外

这是决策论(decision theory)中的一道小题：我们选择在后验分布(posterior distribution)下令期望损失（expected loss）最小的行动，而这里的“损失”就是死亡的概率。只有 $P(A\mid C')$ 才起作用这一观察，以及最佳行动随之改变的临界值 $p<\frac{3}{4}$，都是分析这类决策的典型手法：数据改变后验分布，后验分布决定行动。想进一步了解条件概率和贝叶斯更新（Bayesian updating），可参阅 Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率论入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。