详细解答

STEP I 1997，第 11 题

力学 · 有阻力的运动

> **STEP I 1997，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q11

关键思路

阻力取决于速度，但我们想要的是速度作为距离的函数，而不是时间的函数。因此我们把加速度写成 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\frac{1}{2}v^2)$。以 $w = v^2$ 为未知量，运动方程（equation of motion）便成为一条线性一阶方程，用积分因子（integrating factor）即可一举解出。最后一部分的关键在于一个物理事实：阻力永远与运动方向相反，所以质点掉头时，阻力的方向也随之改变。

解答

我们把质点（particle）模拟为一个单位质量的点，沿铅垂线运动，受其重量 g（向下）以及大小为 kv^2、方向与速度相反的阻力（resistance）作用。由抛射点起向上量度 s。



上升时



下降时

上升运动

质点上升时,其速度 v 向上,所以阻力 kv^2 与重量一同向下作用。由牛顿第二定律(Newton's second law)（质量为 1）得

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -g - kv^2,$$

这里用到 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$。设 $w = v^2$，则 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} = 2v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$:

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} + 2kw = -2g.$$

这条方程对 w 而言是线性的。乘以积分因子 e^{2ks},

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(w\,\mathrm{e}^{2ks}) = -2g\,\mathrm{e}^{2ks} \quad\Longrightarrow\quad w\,\mathrm{e}^{2ks} = -\frac{g}{k}\,\mathrm{e}^{2ks} + C.$$

当 $s = 0$ 时，$w = u^2$，所以 $C = u^2 + \frac{g}{k}$。因此

$$v^2 = \left(u^2 + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-2ks} - \frac{g}{k} = u^2\mathrm{e}^{-2ks} + \frac{g}{k}(\mathrm{e}^{-2ks} - 1),$$

这正是所求的 $(*)$。（在 $v\,\mathrm{d}v/(g + kv^2) = -\mathrm{d}s$ 中分离变量（separating variables），得出一个对数，同样可行。）

最大高度

当 $v = 0$ 时质点停止上升；由于 $(*)$ 的右方随 s 严格递减，这种情况恰好出现一次，就在最大高度 H 处。在 $(*)$ 中令 $v = 0$:

$$\left(u^2 + \frac{g}{k}\right)\mathrm{e}^{-2kH} = \frac{g}{k} \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^{2kH} = 1 + \frac{ku^2}{g},$$

所以

$$H = \frac{1}{2k}\ln\left(1 + \frac{ku^2}{g}\right).$$

下降路径

> **想一想** 推导 $(*)$ 的过程从没有提及运动方向。那么它为甚么不会继续成立?

其实推导确实用到了方向，就在阻力的正负号上。下降时速度向下，所以阻力 kv^2 此时向上作用，与重量相反。仍然以向上量度 s，并以 v 表示向上的速度，方程变成

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = -g + kv^2, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} - 2kw = -2g,$$

这是另一条微分方程（differential equation）。所以 $(*)$ 在下降路径上并不成立。

为了具体看清这一点，我们以 $s = H$ 时 $w = 0$ 为条件解这条新方程。由积分因子 e^{-2ks} 得 $w = \frac{g}{k} + D\mathrm{e}^{2ks}$，而 $w(H) = 0$ 则迫使 $D = -\frac{g}{k}\mathrm{e}^{-2kH}$：

$$v^2 = \frac{g}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-2k(H-s)}\right) \qquad (0 \le s \le H).$$

利用 $u^2 + \frac{g}{k} = \frac{g}{k}\mathrm{e}^{2kH}$，方程 $(*)$ 可以写成 $v^2 = \frac{g}{k}(\mathrm{e}^{2k(H-s)} - 1)$。设 $x = 2k(H-s) \ge 0$，这两个式子分别是 $\frac{g}{k}(1 - \mathrm{e}^{-x})$ 和 $\frac{g}{k}(\mathrm{e}^{x} - 1)$，而

$$(\mathrm{e}^{x} - 1) - (1 - \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2 = (\mathrm{e}^{x/2} - \mathrm{e}^{-x/2})^2 > 0 \quad \text{当} x > 0.$$

所以在最高点以下的每一点，$(*)$ 给出的速率都是错的（两者只在 $s = H$ 处相符，该处两者皆为零）；它高估了下降时的速率。

还有一个简捷的物理论证。方程 $(*)$ 把 v^2 表示为只与高度有关的函数，所以假如它在下降时也成立，质点经过每个高度时的速率便会与上升时相同，并以速率 u 返回起点。但阻力在整个运动过程中都作负功，所以质点损失了能量，返回时必定较慢。事实上，在 $s = 0$ 处，正确的公式给出

$$v^2 = \frac{g}{k}\left(1 - \frac{1}{1 + ku^2/g}\right) = \frac{u^2}{1 + ku^2/g} < u^2.$$

验算

- 当 $k \to 0$ 时，$\ln(1 + ku^2/g) \approx ku^2/g$，所以 $H \to u^2/(2g)$，即大家熟悉的无阻力高度；而 $(*)$ 则趋向 $v^2 = u^2 - 2gs$（展开 $\mathrm{e}^{-2ks} \approx 1 - 2ks$）。
- 数值上，取 $u = 10$、$k = 0.05$、$g = 9.8$，对运动方程逐步计算得 $H \approx 4.1224$，与 $\frac{1}{0.1}\ln(1 + \frac{5}{9.8}) = 4.12245$ 吻合；质点返回时 $v^2 \approx 66.22$，与 $u^2/(1 + ku^2/g)$ 吻合，而不是 $u^2 = 100$。下降至一半时，$v^2 \approx 36.51$，而 $(*)$ 则会给出 44.87。

常见错误

- 用单一方程描述整个运动，并把阻力写成 $-kv^2$：由于 $v^2 \ge 0$，这一项永远指向同一方向，这正是一条公式无法同时涵盖上升和下降两段的原因。（若要用单一方程，便需要 $-kv|v|$。）
- 使用 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 并解出以 t 表示的 v，然后苦于消去 t；用 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$ 则可直达答案。

STEP 之外

对于在空气中高速运动的球，二次阻力（quadratic drag）是一个很好的模型，而下降方程显示出*终端速度*（terminal velocity）：随着下落距离增加，$v^2 \to g/k$。把阻力写成

$-kv|v|$, 便得到一条描述整个运动的非线性方程; 大学一年级力学有很大部分就是研究这类方程, 其中力取决于速度, 而能量并不守恒。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）对取决于速度的力和终端速度有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。