详细解答

STEP I 1997，第 10 题

力学 · 圆周运动

> **STEP I 1997，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q10

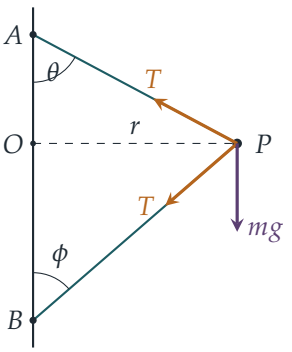
关键思路

由于小环是光滑 (smooth) 的, 绳子可以自由地穿过它滑动, 所以 P 两边的张力 (tension) 是相同的。沿垂直方向分解 (没有垂直加速度), 再沿水平方向分解 (加速度为 $r\omega^2$, 指向转轴), 然后把一条方程除以另一条, 令 T 和 m 消去。接着利用和差化积公式 (sum-to-product formulae)，这个比值便化为单一个半角的正切。

解答

模型与受力

我们把 P 视为一个质点（particle），系于一条轻而不可伸长（light inextensible）的绳子上；小环是光滑的，所以 PA 和 PB 中的张力同为 T。设 O 为圆心，它在直线 AB 上，且 $OP = r$。作用于 P 的力有：它的重量 mg、沿 PA 的张力 T 和沿 PB 的张力 T。



绳段 PA 与垂直线成角 θ（即在 A 点 AB 与 AP 之间的夹角），所以它对 P 的拉力有向上

的分量 $T\cos\theta$ 和指向转轴的分量 $T\sin\theta$。同样，PB 在 B 点与垂直线成角 ϕ，它对 P 的拉力有向下的分量 $T\cos\phi$ 和指向转轴的分量 $T\sin\phi$。

运动方程

P 以恒定速率沿水平圆周运动，所以它没有垂直加速度，而有一个指向 O、大小为 $r\omega^2$ 的加速度。分解各力，得

$$\begin{aligned} &\text{垂直方向：} && T\cos\theta - T\cos\phi = mg, \\ &\text{水平方向：} && T\sin\theta + T\sin\phi = mr\omega^2. \end{aligned}$$

无论三角形的形状如何，这两条方程都成立（例如，假如 P 在 A 的上方，$\cos\theta$ 只不过变成负数而已）。由于 $mg > 0$，第一条方程给出 $\cos\theta > \cos\phi$，所以 $\phi > \theta$：下方的绳段与转轴的倾斜角较大，正如图中所示。

证明结果

把垂直方向的方程除以水平方向的方程，

$$\frac{\cos\theta - \cos\phi}{\sin\theta + \sin\phi} = \frac{g}{r\omega^2}.$$

由和差化积公式，

$$\begin{aligned} \cos\theta - \cos\phi &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\,\sin\tfrac{1}{2}(\phi-\theta), \\ \sin\theta + \sin\phi &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\,\cos\tfrac{1}{2}(\phi-\theta). \end{aligned}$$

由于 $0 < \theta < \pi$ 及 $0 < \phi < \pi$（它们是一个真正的三角形 APB 的内角），我们有 $0 < \frac{1}{2}(\theta+\phi) < \pi$，所以 $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi) \neq 0$，可以约去：

$$\tan\frac{\phi-\theta}{2} = \frac{g}{r\omega^2},$$

这正是所要证明的结果。

张力

> **想一想** 答案可以含有 $\sin\frac{1}{2}(\theta+\phi)$，但不可含有 $\phi-\theta$。我们怎样才能消去 $\cos\frac{1}{2}(\phi-\theta)$?

由水平方向的方程和第二条和差化积公式，

$$2T\sin\tfrac{1}{2}(\theta+\phi)\cos\tfrac{1}{2}(\phi-\theta) = mr\omega^2.$$

我们已知 $\alpha = \frac{1}{2}(\phi - \theta)$ 的正切，所以可以借助一个对边为 g、邻边为 $r\omega^2$ 的直角三角形求出它的余弦。我们有 $0 < \phi - \theta < \pi$，所以 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，从而 $\cos\alpha > 0$：

$$\cos\tfrac{1}{2}(\phi - \theta) = \frac{r\omega^2}{\sqrt{r^2\omega^4 + g^2}}.$$

代入并约去 $r\omega^2$，

$$T = \frac{m\sqrt{r^2\omega^4 + g^2}}{2\sin\frac{1}{2}(\theta + \phi)}.$$

这个结果有一个漂亮的解释：$\sqrt{(mg)^2 + (mr\omega^2)^2}$ 是两个张力的合力（resultant）的大小，而两个大小同为 T、彼此夹角为 $\pi - (\theta + \phi)$（即角 APB）的力，其合力的大小为 $2T\sin\frac{1}{2}(\theta + \phi)$。

验算

- 当 $\omega \to \infty$ 时，右边趋向 0，所以 $\phi \to \theta$。小环被甩向外，直至与 AB 的中点处于同一水平，这正是重力可以忽略时我们预期的情况。
- 当 $\omega \to 0$ 时，$\tan\frac{1}{2}(\phi - \theta) \to \infty$，所以 $\phi - \theta \to \pi$：绳子笔直下垂，这是没有旋转时唯一可能的情况。
- 数值方面，我们随机选取 A、B 和 P 的位置，直接由向量形式的运动方程求出 T 和 ω^2，再由坐标量度 θ 和 ϕ，然后与两个结果比较：在约 8000 个个案中，最大的相对误差为 3×10^{-12}。

常见错误

- 使用两个不同的张力 T_1、T_2。小环光滑，就只有一条绳子和一个张力；若用两个不同的张力，问题便无法确定。
- 把 PB 中张力的垂直分量的正负号弄错：这段绳子是把 P 向下拉向 B 的。
- 为 $\cos\frac{1}{2}(\phi - \theta)$ 取负平方根，这样会得出负的张力。

STEP 之外

对于给定的绳长，小环位于以 A 和 B 为焦点（foci）的椭圆（ellipse）上，而绳子与 P 点的切线成相等的角：这就是椭圆的反射性质（reflection property）。因此两个张力的合力沿椭圆的法线（normal）方向，就像一条弯成这个形状的光滑铁线所施的反作用力一样。把约束（constraints）看成垂直于曲面的力，正是拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）

的起点。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）收录了许多这类旋转系统的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。