详细解答

STEP I 1997，第 1 题

纯数学 • 硬币组合的计数

> **STEP I 1997，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/97-s1-q1

本题在 *Beyond STEP* 第 9.5 节凑零钱中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch09/making-change.html

关键思路

要数“方法”的数目，必须有一套系统，把每一个组合恰好列出一次。最自然的做法，是先定下面额最大的硬币的数目，然后是次大的，如此类推。一旦只剩下 2p 和 1p 硬币，数目便立即可得：2p 硬币的数目决定了一切。这样做还有一个好处：10p 的答案可以直接用于 20p 的答案。

解答

次序并不重要：一种“方法”就是选定每种硬币各用多少个。因此我们要数的是非负整数（non-negative integer）解的数目。

基本组件：2p 和 1p 硬币

要用 2p 和 1p 硬币凑成 r 便士，我们选定 2p 硬币的数目 b，它可以是 0 至 $\lfloor r/2 \rfloor$ 之间的任何整数。余下的 $r - 2b \geq 0$ 便士便由 1p 硬币凑成，而且恰好只有一种方法。所以方法的数目是

$$\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1.$$

凑成 10 便士

- 使用一个 *10p* 硬币。它独自凑成整个金额：1 种方法。
- 不用 *10p* 硬币。我们按 5p 硬币的数目分类，即 0、1 或 2 个：

5p 硬币数目	留给 2p 和 1p 的金额	方法数目 $\lfloor r/2 \rfloor + 1$
2	0	1
1	5	3
0	10	6

这样共有 $1 + 3 + 6 = 10$ 种方法。

每一个组合都有确定的 10p 硬币数目和 5p 硬币数目，所以它恰好被数了一次，不多不少。总数是 $1 + 10 = 11$ 种方法，正如题目所求。

凑成 20 便士

以 $F(n)$ 表示用 5p、2p 和 1p 硬币凑成 n 便士的方法数目。我们刚才已得出 $F(10) = 10$，而显然 $F(0) = 1$（不用任何硬币）。至于 $F(20)$，我们按 5p 硬币的数目分类，由 0 至 4 个：

5p 硬币数目	留给 2p 和 1p 的金额	方法数目
4	0	1
3	5	3
2	10	6
1	15	8
0	20	11

所以 $F(20) = 1 + 3 + 6 + 8 + 11 = 29$。

? **想一想** 怎样把 20p 和 10p 硬币纳入计算，而又不会重复计数？

再按大面额硬币分类。要么我们使用 20p 硬币，那么它必定是唯一的硬币：1 种方法。要么不用，这时我们按 10p 硬币的数目分类：

- 两个 10p 硬币：没有余额，$F(0) = 1$ 种方法；
- 一个 10p 硬币：余下 10p，$F(10) = 10$ 种方法；
- 没有 10p 硬币：余下 20p，$F(20) = 29$ 种方法。

这些情况互不相交（disjoint），并且涵盖了所有可能，所以凑成 20 便士的方法数目是

$$1 + 1 + 10 + 29 = 41.$$

验算

- 亲手列出 10p 的情况：10；5+5；5+2+2+1、5+2+1+1+1、5+1 × 5；然后是 2 × 5、2 × 4+1 × 2、...、1 × 10（这类共六个）。合共 11 个。
- 用电脑简单地数一次（对每种硬币的数目逐一循环），得出 11 和 41。这同时确认了中间值 $F(10) = 10$ 和 $F(20) = 29$，以及不用 20p 硬币时共有 40 种方法。
- 小的情况很容易亲手验算：用 5p、2p 和 1p 硬币凑成 5p 共有 $F(5) = 4$ 种方法，与 $1 + 3$ 吻合。

常见错误

- 把次序也计算在内，以致 5+2+2+1 和 2+5+1+2 变成不同的“方法”。它们其实是同一组硬币。
- 遗漏只用一个硬币的方法：单独一个 10p 硬币，以及单独一个 20p 硬币。
- 只给出一个总数，却看不出任何系统。题目已提醒，没有解释的答案不会得分，所以分类讨论本身才是重点。

STEP 之外

这些其实是把 n 拆成取自某个固定集合的部分的分拆（partition）。处理它们的巧妙方法是使用生成函数（generating function）：方法的数目就是

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{20})},$$

中 x^n 的系数，而我们的分类讨论，不过是把这些因式逐个乘开而已。生成函数把计数问题化为代数，并由此通往欧拉（Euler）和拉马努金（Ramanujan）关于分拆的研究。想进一步探索，可参考 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；至于数论方面，则可参考 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。