详细解答

STEP III 1996，第 9 题

力学 · 圆周运动

STEP III 1996，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s3-q9

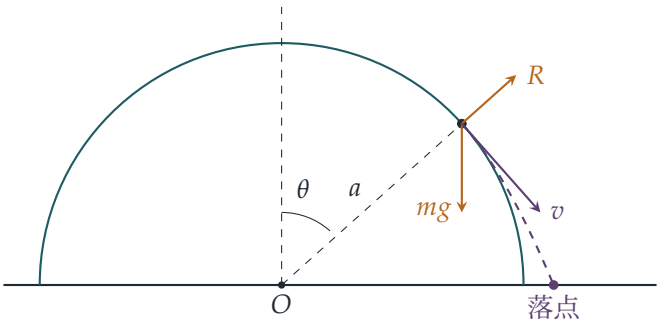
关键思路

整个运动分为两个阶段。质点仍在球面上时，它沿圆周运动，因此由能量守恒（conservation of energy）可求出其速率，再由径向运动方程可求出法向反作用力（normal reaction）；当这个反作用力降至零的一刻，质点便离开球面。此后它只是一个普通的抛体（projectile），从已知的位置、以已知的速率沿切线方向抛出，我们只需求出它在何处越过球心所在的水平面。

解答

模型

把质点视为质量为 m 的质点（point mass），置于一个光滑的固定球面上，球心为 O，并忽略空气阻力。它所受的力只有重量 mg 和法向反作用力 R，后者沿半径方向并背向 O。设 P 为质点所在位置，θ 为 OP 与铅垂向上方向之间的夹角，v 为质点的速率。由于初始位移很小，我们取初速率为零（取极限而言）。



第一阶段：在球面上

反作用力与运动方向垂直，所以它不作功，能量因而守恒。质点由顶点下降了 $a - a\cos\theta$，所以

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mga(1-\cos\theta), \qquad \text{即} \qquad v^2 = 2ga(1-\cos\theta).$$

质点仍在球面上时，它沿半径为 a 的圆周运动，所以沿指向 O 的方向分解力，可得

$$mg\cos\theta - R = \frac{mv^2}{a} \quad \Longrightarrow \quad R = mg\cos\theta - 2mg(1-\cos\theta) = mg(3\cos\theta - 2).$$

> **想一想** 为甚么质点恰好在 $R = 0$ 时离开球面?

球面只能向外推，所以只要两者仍有接触，便有 $R \geq 0$。当 θ 由 0 开始增大，R 由 mg 持续减小，而按上面的公式，过了 $\cos\theta = \frac{2}{3}$ 之后便会有 $R < 0$。这意味着球面要把质点向内拉，但它做不到。因此质点在以下时刻失去接触：

$$\cos\theta = \tfrac{2}{3}, \qquad \sin\theta = \tfrac{\sqrt{5}}{3}, \qquad v^2 = 2ga(1-\tfrac{2}{3}) = \tfrac{2}{3}ga.$$

第二阶段：抛体运动

以 O 为原点建立坐标轴，x 轴沿水平方向（取运动的方向），y 轴铅垂向上。离开球面的一刻，质点位于

$$x_0 = a\sin\theta = \tfrac{\sqrt{5}}{3}a, \qquad y_0 = a\cos\theta = \tfrac{2}{3}a,$$

而它的速度沿切线方向，与水平线成俯角 θ：

$$u_x = v\cos\theta = \tfrac{2}{3}v, \qquad u_y = -v\sin\theta = -\tfrac{\sqrt{5}}{3}v, \qquad \text{其中} v = \sqrt{\tfrac{2}{3}ga}.$$

现在 $y = y_0 + u_y t - \frac{1}{2}gt^2$，所以质点到达 $y = 0$ 时，有

$$\tfrac{1}{2}gt^2 + \tfrac{\sqrt{5}}{3}v\,t - \tfrac{2}{3}a = 0.$$

取正根，

$$t = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}v + \sqrt{\frac{5}{9}v^2 + \frac{4}{3}ga}}{g}.$$

代入 $v^2 = \frac{2}{3}ga$，根号内的式子是 $\frac{10}{27}ga + \frac{36}{27}ga = \frac{46}{27}ga$，而 $\frac{\sqrt{5}}{3}v = \sqrt{\frac{10}{27}ga}$。因此

$$t = \sqrt{\frac{a}{27g}}\,(\sqrt{46} - \sqrt{10}).$$

飞行期间所经过的水平距离为

$$\begin{aligned} u_x t &= \tfrac{2}{3}\sqrt{\tfrac{2}{3}ga}\cdot\sqrt{\frac{a}{27g}}\,(\sqrt{46}-\sqrt{10}) = \frac{2\sqrt{2}\,a}{27}(\sqrt{46}-\sqrt{10}) \\ &= \frac{2a}{27}(\sqrt{92}-\sqrt{20}) = \frac{2a}{27}(2\sqrt{23}-2\sqrt{5}) = \frac{a}{27}(4\sqrt{23}-4\sqrt{5}). \end{aligned}$$

加上起始的水平距离 $x_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}a = \frac{9\sqrt{5}}{27}a$，质点与通过 O 的水平面相遇之处，与球心的距离为

$$x_0 + u_x t = \frac{a}{27}(9\sqrt{5} + 4\sqrt{23} - 4\sqrt{5}) = \frac{a(5\sqrt{5} + 4\sqrt{23})}{27}$$

正是所要求的结果。

飞行途中不会碰到球面

为求严谨，我们应该验证抛体确实不会碰到球面。沿飞行路径设 $f(t) = x^2 + y^2 - a^2$。按 t 的幂次展开：

- 常数项为 $x_0^2 + y_0^2 - a^2 = 0$；
- t 的系数为 $2(x_0 u_x + y_0 u_y) = 0$，因为速度与半径垂直；
- t^2 的系数为 $u_x^2 + u_y^2 - g y_0 = v^2 - ga\cos\theta = 0$，这正正是 $R = 0$ 的条件；
- 余下的是 $-g u_y t^3 + \frac{1}{4}g^2 t^4$，而 $u_y < 0$。

所以当 $t > 0$ 时，$f(t) = g|u_y|\, t^3 + \frac{1}{4}g^2 t^4 > 0$。质点一直留在球面之外，而上面求得的落点距离就是它实际到达的距离。

验算

- 答案约为 $1.125a$。它大于 a，这是必然的，因为质点必须越过球面，而球面在 O 的水平面上伸展至距离 a 处。
- 离开球面时的高度为球心以上 $\frac{2}{3}a$，这是一个广为人知的结果，而且与 g 和 m 无关。落点距离同样与它们无关，这也是量纲分析（dimensional analysis）所要求的：a 是题目中唯一的长度。
- 我们以数值方法逐步计算了这个运动：由一个极小的位移出发，对 $\ddot{\theta} = (g/a)\sin\theta$ 作龙格－库塔（Runge–Kutta）积分，到 $R = 0$ 时停止，然后改以抛体运动继续，结果落在 $1.12458a$ 处。精确公式给出 $1.124580\ldots a$。

常见错误

- 用了 $v^2 = ga\cos\theta$（来自 $R = 0$），却忘记把它与能量方程结合，或者用错了速率：离开球面时 $v^2 = \frac{2}{3}ga$，而不是 $\frac{1}{3}ga$。
- 把抛体当作水平抛出。速度是沿切线方向的，在水平线以下成角 θ，所以从一开始便有向下的分量。

► 由离开球面的位置而不是由球心量度落点距离，这样便漏掉了 x_0。

STEP 之外

“反作用力消失时接触便告终止”这个条件，是*单侧约束*（unilateral constraint）的一个例子。这类约束在力学中随处可见，由金属线上的小珠，以至驶过拱桥的汽车，都是例子。解答最后一步出现的巧合，即抛体的路径与球面在离开点处吻合至二阶，说明在那一刻抛物线与圆具有相同的曲率（curvature）。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）正是以这种精神处理圆周运动、约束力和能量方法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。