详细解答

STEP III 1996，第 8 题

纯数学 · 莫比乌斯变换

> **STEP III 1996，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q8

关键思路

这些都是莫比乌斯变换（Möbius transformation，又称分式线性变换，fractional linear transformation），而几乎所有结论都来自两点观察。把 $y = T(x)$ 的分母消去后，所得方程对 x 是线性的，对 y 也是线性的，所以可以解出其中任何一个。另外，把 $T(x)$ 写成一个常数加上 $1/(cx-d)$ 的倍数，便能立刻看出 T 永远取不到哪个值。至于复合（composition），只须代入再通乘便可；把每个 T 与矩阵 $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -d \end{pmatrix}$ 对应起来，结果最容易整理。

解答

不动点

当 $x \neq d/c$ 时，$T(x) = x$ 即 $ax - b = x(cx - d)$，亦即

$$cx^2 - (a+d)x + b = 0. \qquad (*)$$

首先我们验证 $(*)$ 不会产生被禁止的值 $x = d/c$（当 $c \neq 0$ 时）。代入得 $d^2/c - (a+d)d/c + b = (bc - ad)/c \neq 0$，所以 $(*)$ 的每个根都是真正的不动点（fixed point）。

若 $c \neq 0$，$(*)$ 是二次方程，不动点为

$$x = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4bc}}{2c}.$$

若 $(a+d)^2 > 4bc$，有两个不动点；若 $(a+d)^2 = 4bc$，有一个；若 $(a+d)^2 < 4bc$，则没有。

若 $c = 0$，条件 $ad \neq bc$ 变成 $ad \neq 0$，所以 $d \neq 0$，而 $T(x) = (b - ax)/d$ 处处有定义。这

时 $(*)$ 变成 $(a+d)x = b$。若 $a+d \neq 0$，恰有一个不动点 $x = b/(a+d)$。若 $a+d = 0$ 而 $b \neq 0$，则没有不动点。若 $a+d = 0$ 且 $b = 0$，则 $T(x) = -ax/d = x$，所以 T 是恒等变换（identity），每个 x 都是不动点。

逆变换

由 $y(cx-d) = ax - b$ 得 $cxy - dy = ax - b$，所以 $x(cy-a) = dy - b$，因此

$$x = T^{-1}(y) = \frac{dy-b}{cy-a}.$$

这与 T 的形式相同，其中

$$a' = d, \qquad b' = b, \qquad c' = c, \qquad d' = a,$$

而且条件依然成立，因为 $a'd' - b'c' = da - bc \neq 0$。（除以 $cy-a$ 是合理的，因为 $y = a/c$ 永远不是 T 的值；见下一部分。）

集合 S_r

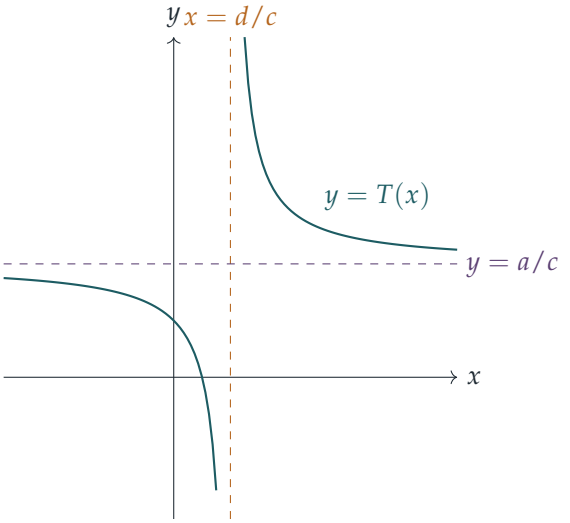
设 $c \neq 0$。$T(x)$ 恰好在 $cx \neq d$ 时有定义，所以我们取 $r = d/c$。于是 T 对每个 $x \in S_{d/c}$ 都有定义。要求出像（image），我们把常数部分分拆出来：

$$ax - b = \frac{a}{c}(cx-d) + \frac{ad-bc}{c}, \qquad \text{所以} \qquad T(x) = \frac{a}{c} + \frac{ad-bc}{c\,(cx-d)}.$$

由于 $ad - bc \neq 0$，第二项永不为零，所以 $T(x) \neq a/c$。反过来，每个 $y \neq a/c$ 都能取到。由逆变换的公式得 $x = (dy-b)/(cy-a)$，而这个 x 不等于 d/c，因为 d/c 不是 T^{-1} 的值（把同一个论证用于 T^{-1}，它的“a'/c'”就是 d/c）。因此

$$T(S_{d/c}) = S_{a/c},$$

而 T 是由 $S_{d/c}$ 到 $S_{a/c}$ 的双射（bijection）。其图像是一条等轴双曲线（rectangular hyperbola），渐近线（asymptote）为 $x = d/c$ 和 $y = a/c$：



（草图采用 $T(x) = (2x-1)/(x-1) = 2 + 1/(x-1)$。）

若 $c = 0$，则 $d \neq 0$ 且 $a \neq 0$（因为 $ad \neq 0$），而 $T(x) = (b - ax)/d$ 是一个非常数的线性函数。所以 T 对所有实数 x 都有定义，无须排除任何值，并且把 $\mathbb{R}$ 双射地映满 $\mathbb{R}$。假如我们仍然移去一点 r，则 $T(S_r) = S_{T(r)} = S_{(b-ar)/d}$。

复合

把 $T_1(x) = \dfrac{a_1x - b_1}{c_1x - d_1}$ 代入 T_2，然后把分子和分母同乘以 $c_1x - d_1$：

$$\begin{aligned} T_2(T_1(x)) &= \frac{a_2(a_1x - b_1) - b_2(c_1x - d_1)}{c_2(a_1x - b_1) - d_2(c_1x - d_1)} \\ &= \frac{(a_1a_2 - b_2c_1)\,x - (a_2b_1 - b_2d_1)}{(a_1c_2 - c_1d_2)\,x - (b_1c_2 - d_1d_2)}. \end{aligned}$$

所以 T_3 具有相同的形式，其中

$$a_3 = a_1a_2 - b_2c_1, \quad b_3 = a_2b_1 - b_2d_1, \quad c_3 = a_1c_2 - c_1d_2, \quad d_3 = b_1c_2 - d_1d_2.$$

想一想 “相同的形式”真的已经证明了吗？我们还需要 $a_3d_3 \neq b_3c_3$。

是的，这确实需要证明。这些系数正好是以下矩阵乘积的元素：

$$\begin{pmatrix} a_2 & -b_2 \\ c_2 & -d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & -b_1 \\ c_1 & -d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 & -b_3 \\ c_3 & -d_3 \end{pmatrix},$$

而每个矩阵的行列式（determinant）都是 $bc - ad$。由于乘积的行列式等于行列式的乘积，

$$b_3c_3 - a_3d_3 = (b_1c_1 - a_1d_1)(b_2c_2 - a_2d_2) \neq 0.$$

（你也可以直接展开，只需几行代数运算。）所以 T_3 是同一类型的变换。

T^2 何时是恒等变换?

在复合公式中取 $T_1 = T_2 = T$。于是 $T^2(x) = \dfrac{Ax - B}{Cx - D}$，其中

$$A = a^2 - bc, \qquad B = b(a-d), \qquad C = c(a-d), \qquad D = bc - d^2.$$

T^2 是恒等变换，即是对其定义域内所有 x 都有 $Ax - B = x(Cx - D)$，而定义域是除了至多几个点以外的全部实数。一个多项式等式若在无限多个点上成立，便恒等地成立，所以我们比较系数：

$$C = 0, \qquad A + D = 0, \qquad B = 0,$$

亦即

$$c(a-d) = 0, \qquad (a-d)(a+d) = 0, \qquad b(a-d) = 0.$$

- 若 $a = d$，三式全部成立。事实上 $T^2(x) = \dfrac{(a^2 - bc)x}{-(bc - a^2)} = x$，其中 $a^2 - bc = ad - bc \neq 0$。
- 若 $a \neq d$，我们需要 $b = c = 0$ 和 $a = -d$。这时 $T(x) = ax/(-d) = x$，所以 T 本身就是恒等变换。

所以 T^2 是恒等变换，**当且仅当** $a = d$，**或** $b = c = 0$ **且** $a + d = 0$（即 T 是恒等变换）。第二种情况是平凡的，所以值得留意的对合（involution）正好是形如 $x \mapsto \dfrac{ax - b}{cx - a}$ 而 $a^2 \neq bc$ 的映射。

一个例子

根据刚才求得的条件，我们需要两个满足 $a = d$ 的映射，而它们的复合却有 $a \neq d$。取

$$T_1(x) = -x \quad (a_1, b_1, c_1, d_1) = (1, 0, 0, 1), \qquad T_2(x) = 1 - x \quad (a_2, b_2, c_2, d_2) = (1, 1, 0, 1).$$

两者都有 $a = d$，所以 T_1^2 和 T_2^2 都是恒等变换。这也可以直接看出：$-(-x) = x$ 和 $1 - (1 - x) = x$。它们的复合是

$$T_3(x) = T_2(T_1(x)) = 1 - (-x) = x + 1,$$

写成标准形式时有 $(a_3, b_3, c_3, d_3) = (1, -1, 0, -1)$，所以 $a_3 \neq d_3$。事实上 $T_3^2(x) = x + 2 \neq x$。

从几何上看，直线上的两个反射（reflection）（分别关于 0 和 $\frac{1}{2}$）复合起来是一个平移（translation），而平移并不是自身的逆变换。若想要一个 $c \neq 0$ 的例子，可试试 $T_1(x) = -1/x$ 配上同一个 T_2。这时 $T_3(x) = (x+1)/x$，而 $T_3^2(x) = (2x+1)/(x+1)$。

验算

- 采用草图中的例子 $T(x) = (2x-1)/(x-1)$（$a=2$，$b=1$，$c=d=1$）。它的不动点是 $x^2-3x+1=0$ 的根，即 $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$，你可以验证 $T(2.618\ldots) = 2.618\ldots$。它的逆变换是 $(y-1)/(y-2)$，在 $y = 2 = a/c$ 处没有定义，与预测相符。
- 在复合公式中取 $T_1 = T$、$T_2 = T^{-1}$，即 $(a_2, b_2, c_2, d_2) = (d, b, c, a)$，得 $a_3 = ad - bc$，$b_3 = 0$，$c_3 = 0$，$d_3 = bc - ad$。这是恒等变换，正如所料。
- 我们用电脑验证了逆变换、像和复合的公式，方法是以精确分数对数千组随机的 (a, b, c, d) 进行计算。电脑亦就所有满足 $ad \neq bc$ 的整数 $a, b, c, d \in [-3, 3]$，把 T^2 为恒等变换的条件与直接计算的结果互相对照。

常见错误

- 忘记平凡的情况：$a = d$ 并非必要条件，因为恒等变换（$b = c = 0$，$a = -d$）的平方也是恒等变换。
- 证明了复合是两个线性函数之比，却没有验证 $a_3 d_3 \neq b_3 c_3$。
- 在 $c = 0$ 的情况下寻找被排除的点。非常数的线性映射处处有定义，而且能取遍每一个实数。

STEP 之外

容许 $x = \infty$，并规定 $T(d/c) = \infty$ 和 $T(\infty) = a/c$，便令每个这样的 T 都成为扩充直线（extended line）上的双射。若系数取复数，就得到黎曼球面（Riemann sphere）上的莫比乌斯变换。上面用到的矩阵对应关系说明这些映射构成一个群（group），它同构（isomorphic）于可逆 2×2 矩阵模去纯量倍数所得的群（射影线性群，projective linear group）。复合变成矩阵乘法，而一个不是恒等变换的映射是对合，恰好当它的矩阵的迹（trace）为零；在这里即是 $a - d = 0$。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）中有一章讲莫比乌斯变换，写得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。