详细解答

STEP III 1996，第 7 题

纯数学 · 根的对称函数

STEP III 1996，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s3-q7

关键思路

两部分都建基于同一个事实：三个数的任何对称式（symmetric expression），都可以用它们的和、两两乘积之和，以及它们的积来表示，而这三个量正好就是以这三个数为根（roots）的三次方程（cubic）的系数。在 (i) 中，这把一个非线性方程组化为一条三次方程。在 (ii) 中，我们根本不需要求出根：希罗公式（Heron's formula）对 a, b, c 是对称的，所以只要有三次方程的系数就足够了。

解答

第 (i) 部分

首先是平方和：

$$\alpha^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx), \qquad \text{所以} \qquad x^2+y^2+z^2 = \alpha^2 - 2\beta.$$

接着我们利用因式分解（factorisation）

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx),$$

你可以展开右方来验证：$x\cdot xy$ 和 $y\cdot(-xy)$ 这类交叉项共九个，它们两两抵消，余下三个形如 $-xyz$ 的项。代入后得

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3 &= 3\gamma + \alpha(\alpha^2 - 2\beta - \beta) \\ &= \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma. \end{aligned}$$

所以 $A=1, B=-3$ 及 $C=3\gamma$。（这里 C 是积的三倍，所以它取决于 γ；A 和 B 则是纯数字。）

现在处理方程组。我们有 $\alpha = 1$，而平方和给出

$$3 = \alpha^2 - 2\beta = 1 - 2\beta \quad \Longrightarrow \quad \beta = -1.$$

立方和则给出

$$4 = \alpha^3 - 3\alpha\beta + 3\gamma = 1 + 3 + 3\gamma \quad \Longrightarrow \quad \gamma = 0.$$

想一想 我们已知 α, β 和 γ。怎样由此求回 x, y, z?

x, y, z 三数的和为 α、两两乘积之和为 β、积为 γ，当且仅当它们是以下方程的三个根：

$$(t - x)(t - y)(t - z) = t^3 - \alpha t^2 + \beta t - \gamma = 0.$$

两个方向都成立：若 x, y, z 是方程组的解，它们就是这条三次方程的根；反过来，这条三次方程的根不论以甚么次序排列，都有正确的 α, β, γ，因而（根据上面的恒等式）满足全部三条方程。这里的三次方程是

$$t^3 - t^2 - t = t\,(t^2 - t - 1) = 0, \qquad \text{所以} \qquad t = 0, \quad t = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \quad t = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5}).$$

因此解为

$$\{x, y, z\} = \left\{ 0,\ \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{5}),\ \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) \right\},$$

次序不拘：由于三个值互不相同，合共有六个有序三元组 (x, y, z)。

第 (ii) 部分

由于 a, b, c 是该三次方程的根，

$$x^3 - 16x^2 + 81x - 128 = (x - a)(x - b)(x - c)$$

对所有 x 都成立。比较 x^2 的系数，得 $a + b + c = 16$，所以 $s = 8$。穷门来了：把 $x = s = 8$ 代入这个恒等式。右方变成 $(s - a)(s - b)(s - c)$，正是希罗公式中的那个乘积：

$$(s - a)(s - b)(s - c) = 8^3 - 16 \cdot 8^2 + 81 \cdot 8 - 128 = 512 - 1024 + 648 - 128 = 8.$$

因此

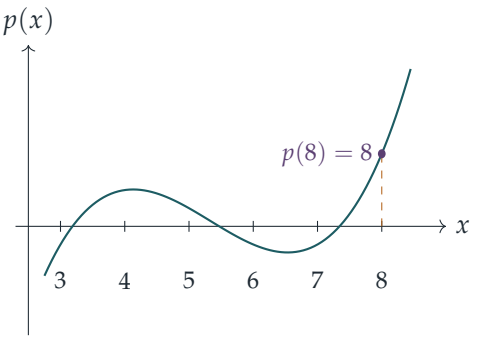
$$\text{面积} = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} = \sqrt{8 \cdot 8} = 8.$$

想一想 真的有一个三角形以这三个数为边长吗?

我们应该检查一下，因为只有当 a, b, c 都是正数，而且每一个都小于其余两个之和时，希罗公式所描述的才是一个三角形。由于 $a < b + c \iff 2a < a + b + c \iff a < s$，我们需要三个根全部是实数、正数，并且小于 8。设 $p(x) = x^3 - 16x^2 + 81x - 128$。那么

$$p(3) = -2, \quad p(4) = 4, \quad p(5) = 2, \quad p(6) = -2, \quad p(7) = -2, \quad p(8) = 8,$$

所以根据正负号的变化，在 $(3,4)$, $(5,6)$ 和 $(7,8)$ 每个区间内各有一个根。三次方程最多有三个根，所以这些就是全部的根，而且每个根都严格介乎 0 与 8 之间。这个三角形确实存在，其面积为 8。



验算

- 在 (i) 中，试取 $x=1, y=2, z=3$：$\alpha=6, \beta=11, \gamma=6$，而 $216-198+18=36=1+8+27$。
- 取 $x=0, y=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\approx 1.618, z=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\approx -0.618$：和为 1，又因为 $y^2=y+1$ 及 $z^2=z+1$，平方和为 $(y+z)+2=3$，立方和为 $y^2+z^2+(y+z)=3+1=4$。
- 以数值计算，(ii) 中的根为 $a\approx 3.186$, $b\approx 5.471$, $c\approx 7.343$。把这些值代入希罗公式得 8.000；用余弦定理（cosine rule）求出 C 后，$\frac{1}{2}ab\sin C$ 亦得出相同结果。

常见错误

- 只给出一个三元组，而没有列出全部六种排列；或者忘记 $t=0$ 是 $t^3-t^2-t=0$ 的一个根。
- 弄错韦达公式（Vieta's formulas）中的正负号：对于 $t^3-\alpha t^2+\beta t-\gamma$，正负号是交替出现的。
- 没有检查这些根是否真的构成三角形，就直接求面积。

STEP 之外

对称多项式基本定理（fundamental theorem of symmetric polynomials）指出：凡是 x, y, z 的多项式，只要在置换（permuting）这三个变量后保持不变，就必定是基本对称函数（elementary symmetric functions）α, β, γ 的多项式。牛顿恒等式（Newton's identities）以

递归方式给出幂和（power sums）$x^k + y^k + z^k$。这些想法通往伽罗瓦理论（Galois theory），它解释了为甚么三次和四次方程有求根公式，而一般的五次方程却没有。Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）是朝这个方向迈出第一步的好书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。