详细解答

STEP III 1996，第 6 题

纯数学 · 矩阵群

> **STEP III 1996，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q6

本题在 *Beyond STEP* 第 6.8 节由奇异矩阵组成的群中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch06/singular-group.html

关键思路

S 中每个矩阵（matrix）都是某个固定矩阵 $\mathbf{J}$ 的倍数，而 $\mathbf{J}^2$ 又是 $\mathbf{J}$ 的倍数，所以 S 中元素的相乘，归根究底只是实数的相乘。出人意表的是，这个群（group）的单位元（identity）并不是单位矩阵（identity matrix）$\mathbf{I}$：这个群根本用不着 $\mathbf{I}$。第 (ii) 部分解释了为何必然如此：在一个群之内，每个元素都可以写成涉及任何另一个元素的乘积，而行列式（determinant）是可乘的。

解答

第 (i) 部分

设

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{于是} \qquad \mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{J}.$$

S 的每个元素都是 $a\mathbf{J}$，其中 $a \neq 0$，我们记 $\mathbf{M}_a = a\mathbf{J}$。

封闭性（closure）。对于非零的 a 和 b，

$$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b = ab\,\mathbf{J}^2 = 2ab\,\mathbf{J} = \mathbf{M}_{2ab}.$$

由于 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$，我们有 $2ab \neq 0$，所以乘积属于 S。因此 S 在矩阵乘法下封闭。

现在检查其余的群公理（group axioms）。

结合律（associativity）。矩阵乘法对所有 2×2 矩阵都满足结合律，对 S 中的矩阵自然也成立。

单位元。我们要找 $\mathbf{M}_e$，使得对每个 b 都有 $\mathbf{M}_e\mathbf{M}_b=\mathbf{M}_b$，即 $2eb=b$。所以取 $e=\frac{1}{2}$：

$$\mathbf{M}_{1/2}\mathbf{M}_b=\mathbf{M}_{2\cdot\frac{1}{2}b}=\mathbf{M}_b,$$

同理 $\mathbf{M}_b\mathbf{M}_{1/2}=\mathbf{M}_b$。所以 $\mathbf{E}=\frac{1}{2}\mathbf{J}$ 是单位元，而且它属于 S。

> ? **想一想** 单位矩阵 $\mathbf{I}$ 不在 S 之中。由矩阵组成的群不是需要它吗?

不需要。一个群需要的是某个元素，对集合中其他元素起单位元的作用，而 $\frac{1}{2}\mathbf{J}$ 对 S 的每个元素都做到这一点。它并不是所有 2×2 矩阵的单位元（例如 $\frac{1}{2}\mathbf{JI}\neq\mathbf{I}$），但 $\mathbf{I}$ 不在 S 之中，所以这并无影响。

逆元（inverses）。给定 $\mathbf{M}_a$，我们要找 $\mathbf{M}_c$ 使得 $2ac=\frac{1}{2}$，所以 $c=\dfrac{1}{4a}$；因为 $a\neq 0$，这个数存在而且非零。于是

$$\mathbf{M}_a\mathbf{M}_{1/(4a)}=\mathbf{M}_{1/(4a)}\mathbf{M}_a=\mathbf{M}_{2a/(4a)}=\mathbf{M}_{1/2}=\mathbf{E}.$$

四条公理全部成立，所以 S 在矩阵乘法下是一个群。（它甚至是阿贝尔群（abelian group），因为 $\mathbf{M}_a\mathbf{M}_b=\mathbf{M}_{2ab}=\mathbf{M}_b\mathbf{M}_a$。）留意 S 每个元素的行列式都是 $a^2-a^2=0$。这些矩阵没有通常意义下的逆矩阵，但每一个在群内都有逆元。

第 (ii) 部分

假设 $\mathbf{A}\in G$ 满足 $\det\mathbf{A}=0$，并设 $\mathbf{B}$ 为 G 的任意元素。因为 G 是群，$\mathbf{A}$ 在 G 中有逆元 $\mathbf{A}'$，满足 $\mathbf{AA}'=\mathbf{A}'\mathbf{A}=\mathbf{E}$。（我们写 $\mathbf{A}'$ 而不写 $\mathbf{A}^{-1}$：它是 G 之内的逆元，而不是逆矩阵，后者并不存在。）

设 $\mathbf{C}=\mathbf{A}'\mathbf{B}$。由封闭性，$\mathbf{C}\in G$，而且

$$\mathbf{AC}=\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B})=(\mathbf{AA}')\mathbf{B}=\mathbf{EB}=\mathbf{B},$$

这里用到结合律，以及 $\mathbf{E}$ 是 G 的单位元这一事实。所以方程 $\mathbf{AC}=\mathbf{B}$ 在 G 中有解 $\mathbf{C}$。取行列式，并利用 $\det(\mathbf{XY})=\det\mathbf{X}\det\mathbf{Y}$，

$$\det\mathbf{B}=\det\mathbf{A}\ \det\mathbf{C}=0\cdot\det\mathbf{C}=0.$$

由于 $\mathbf{B}$ 是任意的，G 的每个元素都是奇异（singular）的。特别地，这样的群的单位元 $\mathbf{E}$ 也是奇异的，所以它不可能是 $\mathbf{I}$，正如我们在第 (i) 部分所见。

> ? **想一想** 我们在哪里用到 G 是一个群，而不仅仅是一个在乘法下封闭的集合?

我们用了逆元 $\mathbf{A}'$ 和单位元 $\mathbf{E}$，把 $\mathbf{B}$ 写成 $\mathbf{A}$ 乘以 G 中的某个元素。没有它们，结论便不成立。例如，$\{\mathbf{I}, \mathbf{0}\}$ 在乘法下封闭，并且包含一个奇异矩阵，但 $\mathbf{I}$ 并不奇异。（它不是群：$\mathbf{0}$ 没有逆元。）

$n = 3$ 的一个例子。我们仿照第 (i) 部分的做法。设

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad G = \{\, a\mathbf{K} : a \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \,\}.$$

$\mathbf{K}^2$ 的每个元都是 $1+1+1=3$，所以 $\mathbf{K}^2 = 3\mathbf{K}$，并且

$$(a\mathbf{K})(b\mathbf{K}) = 3ab\,\mathbf{K}.$$

- 封闭性：若 $a, b \neq 0$，则 $3ab \neq 0$，所以乘积属于 G。
- 结合律：这是从矩阵乘法继承而来的。
- 单位元：$\mathbf{E} = \frac{1}{3}\mathbf{K}$，因为 $(\frac{1}{3}\mathbf{K})(b\mathbf{K}) = (b\mathbf{K})(\frac{1}{3}\mathbf{K}) = 3 \cdot \frac{1}{3}b\,\mathbf{K} = b\mathbf{K}$。
- 逆元：$a\mathbf{K}$ 的逆元是 $\dfrac{1}{9a}\mathbf{K}$，因为 $3 \cdot a \cdot \dfrac{1}{9a} = \frac{1}{3}$。

所以 G 在矩阵乘法下是一个群。每个 $a\mathbf{K}$ 的三行都相同，所以 $\det(a\mathbf{K}) = 0$：这是一个由奇异 3×3 矩阵组成的群。

（另一个同样可行的例子，是所有形如 $\operatorname{diag}(a, b, 0)$ 而 $a, b \neq 0$ 的矩阵所组成的集合，其单位元为 $\operatorname{diag}(1, 1, 0)$。）

验算

- 试一个例子：$\mathbf{M}_3\mathbf{M}_{1/12}$ 的每个元都是 $3 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$，所以它等于 $\mathbf{E} = \mathbf{M}_{1/2}$，与逆元公式 $\frac{1}{4a}$ 所预测的一致。
- 我们以精确分数，对数百组随机的非零 a, b, c 作了检查：2×2 和 3×3 两族矩阵的封闭性、单位元和逆元公式都成立，这些矩阵的行列式全部为 0，而且 $\mathbf{A}(\mathbf{A}'\mathbf{B}) = \mathbf{B}$。

常见错误

- 把 $\mathbf{I}$ 当作单位元，或把 $\mathbf{A}^{-1}$ 当作通常的逆矩阵。两者在 S 中都不存在。应该从群本身的乘法规则找出单位元和逆元。
- 忘记检查 $2ab \neq 0$。封闭性要求乘积既有正确的形式，*而且*参数非零。

STEP 之外

决定一个群的是它的运算，而不是它的元素恰好身处何方。这里的群位于 $n \times n$ 矩阵之中，却不与它们共用同一个单位元。事实上 $\mathbf{E}$ 必定满足 $\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}$，所以它是一个投影（projection），而这个群以可逆映射的方式作用于 $\mathbf{E}$ 的像（image）上。映射 $a \mapsto \mathbf{M}_{a/2}$ 是由乘法下的非零实数到 S 的同构（isomorphism），你可以直接验证。想进一步了解，可参阅 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）；关于投影，可参阅 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数导论）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。