详细解答

STEP III 1996，第 5 题

纯数学 · 倍角公式

STEP III 1996，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s3-q5

关键思路

用二项式定理（binomial theorem）展开 $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^7$，再与棣美弗定理（de Moivre's theorem）比较，便可把 $\cos 7\theta$ 和 $\sin 7\theta$ 写成多项式（polynomial）；全式除以 $\cos^7\theta$ 后，一切都化为 $t = \tan\theta$ 的幂。一旦把 $\tan 7\theta$ 写成两个 t 的多项式之比，使 $\tan 7\theta$ 为零的角便令分子为零，而使 $\tan 7\theta$ 无定义的角则令分母为零。除了一个因子 t 之外，两个多项式都是偶函数（even function），所以它们会变成 t^2 的三次多项式（cubic），余下的工作就交给韦达定理（Vieta's formulae）。

解答

$\tan 7\theta$ 的公式

设 $c = \cos\theta$ 及 $s = \sin\theta$，由棣美弗定理和二项式定理，

$$\cos 7\theta + \mathrm{i}\sin 7\theta = (c + \mathrm{i}s)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} \mathrm{i}^k c^{7-k} s^k.$$

假设 $\cos\theta \neq 0$，使 $t = \tan\theta$ 有定义。抽出 c^7 得 $(c + \mathrm{i}s)^7 = c^7(1 + \mathrm{i}t)^7$。利用 $\mathrm{i}^2 = -1$、$\mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$、$\mathrm{i}^4 = 1$ 以及二项式系数（binomial coefficients）$1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1$，

$$(1 + \mathrm{i}t)^7 = (1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6) + \mathrm{i}\,(7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7).$$

比较实部（real part）与虚部（imaginary part）（除 i 以外，所有量都是实数），

$$\cos 7\theta = \cos^7\theta\,(1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6),$$
$$\sin 7\theta = \cos^7\theta\,(7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7).$$

两式相除，因子 $\cos^7\theta$ 互相约去，再把分子和分母同乘以 -1，

$$\tan 7\theta = \frac{7t - 35t^3 + 21t^5 - t^7}{1 - 21t^2 + 35t^4 - 7t^6} = \frac{t(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7)}{7t^6 - 35t^4 + 21t^2 - 1},$$

这正是所求的结果。

为了稍后使用，留意上面两行式子说明了甚么。记 $N(t) = t(t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7)$ 及 $D(t) = 7t^6 - 35t^4 + 21t^2 - 1$。那么 $\sin 7\theta = -\cos^7\theta\, N(t)$ 及 $\cos 7\theta = -\cos^7\theta\, D(t)$，所以当 $\cos\theta \neq 0$ 时，

$$\sin 7\theta = 0 \iff N(t) = 0, \qquad \cos 7\theta = 0 \iff D(t) = 0.$$

第 (i) 部分

取 $\theta = \frac{k\pi}{7}$，其中 $k = 1, 2, 3$。那么 $\sin 7\theta = \sin k\pi = 0$ 而 $\cos\theta \neq 0$，所以 $N(\tan\theta) = 0$。此外，由于 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，故 $\tan\theta \neq 0$，因此可以约去因子 t：

$$t^6 - 21t^4 + 35t^2 - 7 = 0.$$

所以 $x = t^2$ 满足

$$x^3 - 21x^2 + 35x - 7 = 0$$

其中 $x = \tan^2\frac{\pi}{7}$, $\tan^2\frac{2\pi}{7}$, $\tan^2\frac{3\pi}{7}$。

> **想一想** 我们怎样知道这三个数就是全部的根（roots），而不是同一个根重复数了几次?

角 $\frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{3\pi}{7}$ 全都位于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之内，而 tan 在这个区间上取正值且严格递增（strictly increasing）。所以 $\tan^2$ 的三个值互不相同。三次多项式最多有三个根，因此这三个数恰好就是它的全部根，而这正是我们想要的三次多项式。

由韦达定理，各根之积为 7：

$$\tan^2\tfrac{\pi}{7}\,\tan^2\tfrac{2\pi}{7}\,\tan^2\tfrac{3\pi}{7} = 7.$$

每个角都位于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之内，故每个正切值都是正数，所以我们取正平方根：

$$\tan\tfrac{\pi}{7}\,\tan\tfrac{2\pi}{7}\,\tan\tfrac{3\pi}{7} = \sqrt{7}.$$

第 (ii) 部分

现在取 $\theta = \frac{\pi}{14}, \frac{3\pi}{14}, \frac{5\pi}{14}$。那么 $7\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$，所以 $\cos 7\theta = 0$，而 $\cos\theta \neq 0$。由上文的说明，$D(\tan\theta) = 0$，所以 $y = \tan^2\theta$ 满足

$$7y^3 - 35y^2 + 21y - 1 = 0.$$

与第 (i) 部分一样，这三个角都位于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之内且互不相同，所以 $\tan^2\theta$ 的三个值互不相同，并且恰好就是这个三次多项式的全部根。由韦达定理，它们的和为 $\frac{35}{7}$：

$$\tan^2\tfrac{\pi}{14} + \tan^2\tfrac{3\pi}{14} + \tan^2\tfrac{5\pi}{14} = 5.$$

利用第 (i) 部分，还有一个快捷的做法。由于 $\frac{\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{7}$，同样地 $\frac{3\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7}$ 及 $\frac{5\pi}{14} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}$，所求的和就是对第 (i) 部分那个三次多项式的各根 x_i 所取的 $\sum 1/x_i$。即

$$\frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3} = \frac{35}{7} = 5.$$

换句话说，在第 (i) 部分的三次方程中代入 $x = 1/y$ 并去分母，便得到第 (ii) 部分的三次方程。

验算

- 代入 $t = 1$，即 $\theta = \frac{\pi}{4}$。公式给出 $\frac{1-21+35-7}{7-35+21-1} = \frac{8}{-8} = -1$，而事实上 $\tan\frac{7\pi}{4} = -1$。
- 当 θ 很小时，$\tan 7\theta \approx 7t$，而公式在一阶近似下给出 $\frac{-7t}{-1} = 7t$。
- 数值上，$\tan\frac{\pi}{7}\tan\frac{2\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{7} \approx 0.4816 \times 1.2540 \times 4.3813 \approx 2.6458 \approx \sqrt{7}$，而 $\tan^2\frac{\pi}{14} + \tan^2\frac{3\pi}{14} + \tan^2\frac{5\pi}{14} \approx 0.0521 + 0.6360 + 4.3119 = 5.0000$。

常见错误

- 忘记说明三个值互不相同，因而未能确定它们真的是三次多项式的全部根。
- 在第 (i) 部分答 $\pm\sqrt{7}$：由于三个正切值都是正数，符号已经确定。
- 由 i 的幂引起的正负号错误：$\mathrm{i}^6 = -1$ 及 $\mathrm{i}^7 = -\mathrm{i}$。

STEP 之外

各数 $\tan^2\frac{k\pi}{7}$ 是共轭代数数（conjugate algebraic numbers）：它们是同一个整数系数不可约（irreducible）三次多项式的根，所以由它们组成的任何对称式（symmetric expression）都是有理数。这就是伽罗瓦理论（Galois theory）的起点，该理论研究多项式各根之间的对称性。同样的技巧还能给出诸如 $\sum_{k=1}^{n}\cot^2\frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$ 的恒等式，$\sum 1/k^2 = \pi^2/6$ 的其中一个初等证明就用到它。想从几何角度了解棣美弗定理和单位根（roots of unity），可参阅 Needham 的 *Visual Complex Analysis*；想找更多这类题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。