详细解答

STEP III 1996，第 4 题

纯数学 · 最大乘积分拆

> **STEP III 1996，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q4

关键思路

与其逐一搜索 N 的所有拆分（splitting）方式，不如问：一个最优（optimal）拆分不可能包含甚么？任何太大的部分都可以拆成两块而不令乘积（product）减少，而开首的不等式（inequality）所量度的正是这一点。等于 1 的部分是浪费，而太多的 2 则可以换成 3。经过这些调整之后，只剩下寥寥几种形状，而和 N 就从中选定一种。

解答

不等式

我们有

$$k \leq 2(k-2) \iff k \leq 2k-4 \iff k \geq 4.$$

所以满足该不等式的整数是 $k = 4, 5, 6, \ldots$。此外，只有当 $k = 4$ 时等号才成立，而对于 $k \geq 5$，不等式是严格的：$k < 2(k-2)$。

最优拆分的模样

固定 $N \geq 2$。把 N 写成正整数之和的方式只有有限多种，所以最大乘积 $P(N)$ 存在。各部分的次序不影响和与乘积，所以我们把一个拆分视为由若干部分组成的一个集合。若一个拆分的乘积等于 $P(N)$，就称它为最优拆分。我们提出三项观察，每一项都会改动拆分，但保持其和等于 N。

(a) **没有任何部分是 5 或以上。**若把一个部分 $m \geq 5$ 换成 2 和 $m-2$ 这两个部分（两者皆为正数），乘积就会乘以 $2(m-2)/m$，而根据不等式的严格形式，这个数大于 1。

所以含有部分 $m \geq 5$ 的拆分并非最优。

等于 4 的部分可以换成 $2+2$ 而乘积不变，因为 $2 \times 2 = 4$（即等号成立的情况 $k = 4$）。所以在最优拆分之中，必有一个没有任何部分大于 3。由现在起，我们只考虑这样的一个最优拆分。

(b) **没有任何部分是** 1。由于 $N \geq 2$，一个等于 1 的部分不会是唯一的部分，所以还有另一个部分 a。把 1 和 a 这两个部分换成单一个部分 $a+1$，和保持不变，而因数 $1 \times a = a$ 则变成 $a+1 > a$。这样乘积就增大了，对最优拆分而言这是不可能的。

(c) **最多只有两个部分是** 2。假如有三个 2，把 $2+2+2$ 换成 $3+3$ 就会把因数 8 变成 9，乘积同样会增大。

所以必有一个最优拆分由 a 个 3 和 b 个 2 组成，其中 $b \in \{0,1,2\}$，并且

$$N = 3a + 2b, \qquad P(N) = 3^a\, 2^b.$$

想一想 会不会有两组不同的 (a,b) 都配合同一个 N，以致我们仍然要比较两者？

不会。取模（modulo）3 得 $2b \equiv N \pmod 3$，而 $b = 0,1,2$ 分别给出 $2b \equiv 0,2,1 \pmod 3$，是三个不同的余数（residue）。所以 N 决定了 b，继而 $a = (N-2b)/3$ 也随之确定。因此

$$P(N) = \begin{cases} 3^{N/3} & \text{若} N \equiv 0 \pmod 3, \\ 2 \times 3^{(N-2)/3} & \text{若} N \equiv 2 \pmod 3, \\ 2^2 \times 3^{(N-4)/3} & \text{若} N \equiv 1 \pmod 3,\ N \geq 4. \end{cases}$$

$N = 5, \ldots, 9$ 时的值

把以上结果逐一应用于每个 N：

$$\begin{aligned} 5 &= 3+2, & P(5) &= 2 \times 3, \\ 6 &= 3+3, & P(6) &= 3^2, \\ 7 &= 3+2+2, & P(7) &= 2^2 \times 3, \\ 8 &= 3+3+2, & P(8) &= 2 \times 3^2, \\ 9 &= 3+3+3, & P(9) &= 3^3, \end{aligned}$$

正如所求。（当 $N = 7$ 时，拆分 $4+3$ 同样是最优的，这就是为甚么观察 (a) 只容许我们把一个 4 换掉，而不能把它排除。）

求 $P(1000)$

由于 $1000 = 3 \times 332 + 4$，我们有 $1000 \equiv 1 \pmod 3$，所以 $b = 2$ 及 $a = (1000 - 4)/3 = 332$。最优拆分是 332 个 3 和两个 2，并且

$$P(1000) = 2^2 \times 3^{332}.$$

换言之，最优拆分是 332 个 3 加两个 2，或者 332 个 3 加一个 4。最优拆分就只有这些，因为 (a)–(c) 中的调整显示，任何其他拆分都可以严格地改进。

验算

- 对 N 的每一个拆分作穷举搜索，在 $N \leq 40$ 的范围内结果与公式吻合，包括题目给出的五个值。
- 利用 $P(n) = \max_{1 \leq p \leq n} p\,P(n-p)$ 以电脑作精确计算，得出 $P(1000) = 4 \times 3^{332}$，这是一个 160 位数。
- 作为合理性检查，可与非整数的“拆分”比较：若分成 N/x 个相等的部分，乘积是 $x^{N/x}$，它在 $x = \mathrm{e} \approx 2.72$ 时最大。这就是为甚么 3（以及偶尔出现的 2）会胜出。

常见错误

- 写成 $1000 = 3 \times 333 + 1$ 并答 3^{333}：这个拆分含有一个 1，而 $3 + 1$ 应换成 $2 + 2$，因为 $4 > 3$。
- 声称部分 4“不可能出现”。它可以在最优拆分中出现；只是它永远不会比 $2 + 2$ 更好。
- 只列出 $N = 5, \ldots, 9$ 时的值，却没有证明没有其他拆分能胜过它们。正是关于结构的论证，才证明了这些值是最大的。

STEP 之外

这里的论证是典型的*极端*（extremal）论证或*交换*（exchange）论证：先假设最优的对象存在，然后证明它必定不含某些局部模式。同样的想法也出现于组合数学（combinatorics）、证明贪婪算法（greedy algorithm）为最优的论证，以及整数分拆（integer partitions）的理论之中。其连续版本（求 $x^{N/x}$ 的最大值）是一道有趣的微积分练习。想做更多同类风格的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；至于同余（congruence）与初等数论，可参阅 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。