详细解答

STEP III 1996，第 3 题

纯数学 · 半角代换

STEP III 1996，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s3-q3

关键思路

被积函数（integrand）若由 $1/(\text{常数}+\text{常数}\cdot\cos x)$ 构成，正是使用半角代换（half-angle substitution）$t=\tan\frac{1}{2}x$ 的经典情形：这个代换能把任何关于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函数（rational function）化为 t 的有理函数。在本题中，它给出标准的 $\int \mathrm{d}t/(k^2+t^2)$，结果是一个反正切（inverse tangent）。其后两个“由此”的结果，只需把各个被积函数重新调整比例，化成 $1/(1-a\cos x)$ 的形式，再选取 a 和 θ 即可。

解答

一般积分

设 $t=\tan\frac{1}{2}x$。当 x 由 0 变到 θ 时，t 由 0 变到 $T=\tan\frac{1}{2}\theta$，而由于 $0<\frac{1}{2}\theta<\frac{1}{2}\pi$，这个值是有限的正数。由标准的半角公式可得

$$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

其中第二式是因为 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}(1+t^2)$。于是

$$1-a\cos x=\frac{(1+t^2)-a(1-t^2)}{1+t^2}=\frac{(1-a)+(1+a)t^2}{1+t^2},$$

所以 $1+t^2$ 这个因子互相约去，得

$$\int_0^{\theta}\frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{T}\frac{2}{(1-a)+(1+a)t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{1+a}\int_0^{T}\frac{1}{k^2+t^2}\,\mathrm{d}t,\qquad k^2=\frac{1-a}{1+a}.$$

由于 $-1<a<1$，$1-a$ 和 $1+a$ 都是正数，所以 $k=\sqrt{(1-a)/(1+a)}$ 确实是一个正实数。（这正是用到 a 的条件的地方：若 $|a|\geq 1$，分母可能等于零，积分便会成为瑕积

分（improper integral），又或者答案会是对数（logarithm）。）利用 $\int \mathrm{d}t/(k^2+t^2) = \frac{1}{k}\tan^{-1}(t/k)$，

$$\int_0^\theta \frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(1+a)k}\tan^{-1}\frac{T}{k}.$$

最后，$(1+a)k = \sqrt{(1+a)^2}\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} = \sqrt{1-a^2}$，所以

$$\boxed{\int_0^\theta \frac{1}{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\tan\tfrac{1}{2}\theta\right).}$$

想一想 为甚么需要 $\theta < \pi$?

代换 $t = \tan\frac{1}{2}x$ 在 $x = \pi$ 处失效，因为那里 t 会变成无限大。保持 $\theta < \pi$，整个范围 $[0,\theta]$ 便会映到有限区间 $[0,\tan\frac{1}{2}\theta]$，公式亦无需特别处理。（令 $\theta \to \pi$ 可得 $\pi/\sqrt{1-a^2}$，因为 $\tan^{-1}$ 趋向 $\frac{1}{2}\pi$。）

第一个“由此”

抽出因子 2：

$$\frac{1}{2-a\cos x} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}a\cos x}.$$

要使积分有限，我们需要 $-2 < a < 2$，这时 $b = \frac{1}{2}a$ 满足 $-1 < b < 1$，所以可以套用一般结果，把 a 换成 b，并取 $\theta = \frac{1}{2}\pi$，此时 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1$：

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{1}{2-a\cos x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}a}{1-\frac{1}{2}a}}\\ &= \frac{2}{\sqrt{4-a^2}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{2+a}{2-a}},\end{aligned}$$

这是因为 $\sqrt{1-\frac{1}{4}a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}$，并把反正切内分数的分子和分母同时乘以二。这就是所要求的结果。

第二个“由此”

这次我们抽出 $\sqrt{2}$：

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cos x},$$

所以我们取 $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$（它在 $(-1,1)$ 之内）和 $\theta=\frac{3}{4}\pi$（它在 $(0,\pi)$ 之内）。于是 $\sqrt{1-a^2}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，而

$$\frac{1+a}{1-a}=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2,$$

这是把分子和分母同乘以 $\sqrt{2}-1$，并利用 $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)=1$ 而得。所以该平方根等于 $\sqrt{2}-1$，而一般公式给出

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}+\cos x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{1/\sqrt{2}}\tan^{-1}\Big((\sqrt{2}-1)\tan\tfrac{3}{8}\pi\Big)=2\tan^{-1}\Big((\sqrt{2}-1)\tan\tfrac{3}{8}\pi\Big).$$

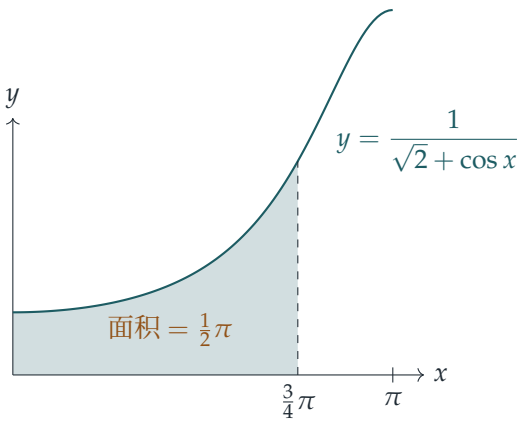
想一想 $\tan\frac{3}{8}\pi$ 等于甚么？

设 $u=\tan\frac{1}{8}\pi>0$，并使用二倍角公式（double-angle formula）：$1=\tan\frac{1}{4}\pi=\dfrac{2u}{1-u^2}$，所以 $u^2+2u-1=0$，而 $u=\sqrt{2}-1$（取正根）。由于 $\frac{3}{8}\pi=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{8}\pi$，我们得到 $\tan\frac{3}{8}\pi=\cot\frac{1}{8}\pi=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$。

因此 $(\sqrt{2}-1)\tan\frac{3}{8}\pi=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$，而

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}+\cos x}\,\mathrm{d}x=2\tan^{-1}1=2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},$$

正如所求。



验算

- 取 $a=0$ 时，一般公式给出 $2\tan^{-1}(\tan\frac{1}{2}\theta)=\theta$，这正是 $\int_0^\theta 1\,\mathrm{d}x$。同样地，在第一个“由此”中取 $a=0$，得到 $\frac{2}{2}\tan^{-1}1=\frac{1}{4}\pi=\int_0^{\pi/2}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$。

- 把方框内的答案对 θ 求导，应该得回 $1/(1-a\cos\theta)$；这是练习链式法则（chain rule）的好题目。
- 对最后一个积分使用辛普森法则（Simpson's rule），得到 1.5707963…，与 $\frac{1}{2}\pi$ 吻合；另外，随机选取数百组 a 和 θ 的值，一般公式和第一个“由此”的结果与辛普森法则的相差亦都在 10^{-10} 以内。

常见错误

- 把被积函数调整成 $1/(1-a\cos x)$ 的形式时，忘记了抽到外面的因子 $\frac{1}{2}$（或 $\frac{1}{\sqrt{2}}$）。
- 在最后一部分使用 $a=+\frac{1}{\sqrt{2}}$：$\sqrt{2}+\cos x$ 中的正负号表示 a 是负数。
- 弄错了 k 的位置：答案是 $\frac{1}{k}\tan^{-1}(t/k)$，而不是 $\tan^{-1}(t/k)$ 或 $\frac{1}{k}\tan^{-1}(kt)$。

STEP 之外

代换 $t=\tan\frac{1}{2}x$（常称为魏尔斯特拉斯代换（Weierstrass substitution））之所以有效，是因为它用有理函数把单位圆（unit circle）参数化，因而能把任何关于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函数化为 t 的有理函数，而后者总可以用部分分式（partial fractions）来积分。像 $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x/(1-a\cos x)=2\pi/\sqrt{1-a^2}$ 这类积分，也是复分析（complex analysis）中围道积分（contour integration）的标准入门例子，当中由代换 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ 和留数定理（residue theorem）完成主要工作。想了解这个观点，可参阅 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以图像方式讲解复分析的著作）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。