详细解答

STEP III 1996，第 2 题

纯数学 · 联立线性方程

> **STEP III 1996，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q2

关键思路

三个未知数的三条线性方程（linear equations），除非系数的行列式（determinant）等于零，否则恰好有一个解。所以第一步是找出令行列式为零的 a 值；对于其余所有 a，我们只需直接求解。这道题真正的内容在于那些例外的值：我们必须按 b 的取值，判断方程组究竟是不相容（inconsistent），还是有无穷多个解。

解答

把各方程编号为

$$x + y + az = 2, \tag{1}$$
$$x + ay + z = 2, \tag{2}$$
$$2x + y + z = 2b. \tag{3}$$

何时有唯一解？

系数矩阵（coefficient matrix）的行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1(a-1) - 1(1-2) + a(1-2a)$$
$$= 2a - 2a^2 = 2a(1-a).$$

所以当 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 时，不论 b 是甚么，方程组都恰好有一个解。$a = 0$ 和 $a = 1$ 这两种情况则须另行处理。

一般情况： $a \neq 0, 1$

由 (1) 减去 (2)，得

$$(1-a)y - (1-a)z = 0,$$

由于 $a \neq 1$，我们可以除以 $1-a$，得 $y = z$。把 $z = y$ 代入 (1) 和 (3)：

$$x + (1+a)y = 2, \qquad 2x + 2y = 2b, \text{ 即 } x + y = b.$$

由第一式减去第二式，得 $ay = 2 - b$，而由于 $a \neq 0$，

$$y = z = \frac{2-b}{a}, \qquad x = b - \frac{2-b}{a} = \frac{(a+1)b - 2}{a}.$$

代回 (1)、(2) 和 (3)，可确认这确实是一个解；而根据上面的论证，它是唯一的解。

$a = 0$ 的情况

方程组变成

$$x + y = 2, \qquad x + z = 2, \qquad 2x + y + z = 2b.$$

把首两条方程相加，得 $2x + y + z = 4$。所以第三条方程的左方必须同时等于 4 和 $2b$。

> ? **想一想** 行列式为零，是否就代表“无解”?

单凭这一点并不足以断定：它只表示这些方程是相依的（dependent），所以要么它们互相矛盾，要么其中一条没有提供新的信息。究竟是哪一种，取决于方程的右方，在这里即取决于 b。

- 若 $b \neq 2$，则 $4 = 2b$ 不成立，所以**无解**。
- 若 $b = 2$，第三条方程只是首两条方程之和，所以只剩下 $x + y = 2$ 和 $x + z = 2$。设 $x = t$，则解为

$$(x, y, z) = (t,\ 2 - t,\ 2 - t), \qquad t \text{ 为任意实数.}$$

$a = 1$ 的情况

这时 (1) 和 (2) 是同一条方程 $x + y + z = 2$，方程组变成

$$x + y + z = 2, \qquad 2x + y + z = 2b.$$

由第二式减去第一式，得 $x = 2b - 2$，于是 $y + z = 2 - x = 4 - 2b$。这两条方程永远不会互相矛盾，所以对于每一个 b 值，都有无穷多个解：

$$(x, y, z) = (2b - 2,\ s,\ 4 - 2b - s), \qquad s \text{ 为任意实数.}$$

总结

- $a \neq 0, 1$：唯一解为 $x = \dfrac{(a+1)b-2}{a}$，$y = z = \dfrac{2-b}{a}$。
- $a = 0$，$b \neq 2$：无解。
- $a = 0$，$b = 2$：$(t,\ 2-t,\ 2-t)$，其中 t 为任意数。
- $a = 1$，b 为任意数：$(2b-2,\ s,\ 4-2b-s)$，其中 s 为任意数。

验算

取 $a = 2$，$b = 4$：公式给出 $y = z = -1$ 和 $x = 5$，而确实有 $5-1-2 = 2$、$5-2-1 = 2$ 和 $10-1-1 = 8 = 2b$。再从结构上检查：一般公式的分母含有 a，所以它在 $a = 0$ 时必定失效；事实正是如此，而我们另外所作的分析说明了原因。在 $a = 1$ 时，公式仍然有意义，给出 $(2b-2,\ 2-b,\ 2-b)$，这正是我们那族解中 $s = 2-b$ 的一员：它只是众多解之一，因为 $y = z$ 不再是必然的。我们以精确的有理数运算，对大量随机选取的 a、b 和参数值验证了所有情况。

常见错误

- 除以 $1-a$ 或 a 时，没有说明 $a \neq 1$ 或 $a \neq 0$。这些除法正是特殊情况藏身之处。
- 以为行列式为零就代表无解。当 $a = 1$ 时，总有无穷多个解；而当 $a = 0$ 时，若 $b = 2$ 也有解。
- 忘记明确写出无穷多个解的通式：只说“有无穷多个解”，并不等于解出了方程。

STEP 之外

每条方程都描述三维空间中的一个平面，而这道题问的是三个平面可以怎样相交：交于一点、交于一条公共直线，或者完全没有公共点（当 $a = 0$，$b \neq 2$ 时，三个平面两两相交于三条平行直线，就像棱柱的各个面一样）。有系统的工具是高斯消去法（Gaussian elimination）和矩阵的秩（rank）这个概念：一个方程组相容，当且仅当把右方的常数项添加到矩阵之后，秩没有增加。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）把这幅图景阐述得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。