详细解答

STEP III 1996，第 14 题

概率与统计 · 两状态马可夫过程

> **STEP III 1996，第 14 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q14

关键思路

把时间切成长度为 δt 的极短区间，然后问：在其中一个区间内可能发生甚么事？各区间的期望次数可凭期望值的线性性质（linearity of expectation）相加，而正在补胎的概率则符合一个简单的“流入减流出”平衡关系；当 $\delta t \to 0$ 时，这个关系就变成一条一阶线性微分方程（first-order linear differential equation）。一旦求得 $p(t)$，期望补胎时间就是它的积分。

解答

爆胎次数的期望值

只有实际踏单车的时间才会发生爆胎，而我在踏单车时一切正常。把踏单车的总时间 T 分成 n 小段，每段长度为 $\delta t = T/n$。设 X_k 为第 k 段内的爆胎次数；准确至 δt 的一阶，X_k 以概率 $\alpha\,\delta t$ 取值 1，否则取值 0，所以 $\mathrm{E}(X_k) = \alpha\,\delta t$。根据期望值的线性性质（毋须假设独立），

$$\mathrm{E}(\text{爆胎次数}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}(X_k) = n\alpha\,\delta t = \alpha T.$$

补胎所花的时间并不计算在内，因为这里的时钟只计踏单车的时间。

$p(t)$ 所满足的方程

现在设 t 为真实（时钟）时间，包括补胎的时间。在时刻 t，我若非正在补胎（概率为 $p(t)$），就是正在踏单车（概率为 $1 - p(t)$）。我在时刻 $t + \delta t$ 正在补胎，当且仅当以下其中一种情况出现：

- 我在时刻 t 正在补胎，而补胎在 $(t, t+\delta t)$ 内没有完成：概率为 $p(t)(1-\beta\,\delta t)$；或
- 我在时刻 t 正在踏单车，并在 $(t, t+\delta t)$ 内爆胎：概率为 $(1-p(t))\,\alpha\,\delta t$。

这两种情况互斥，所以，略去 $(\delta t)^2$ 阶的项（即在同一个极短区间内发生两件事），

$$p(t+\delta t) = p(t)(1-\beta\,\delta t) + \big(1-p(t)\big)\alpha\,\delta t.$$

整理后得

$$\frac{p(t+\delta t)-p(t)}{\delta t} = \alpha - (\alpha+\beta)\,p(t),$$

令 $\delta t \to 0$，即得

$$p'(t) = \alpha - (\alpha+\beta)\,p(t).$$

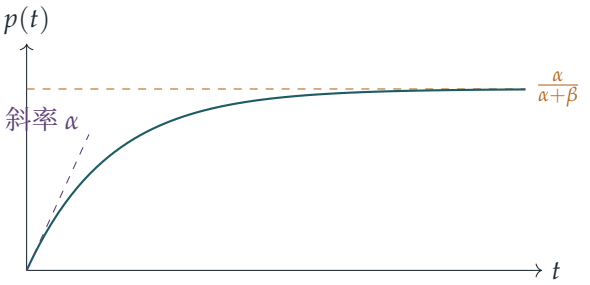
出发时单车状态良好，所以初始条件（initial condition）是 $p(0)=0$。

验证题目给出的解

对于 $p(t) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\big(1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}\big)$，我们有 $p(0) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-1) = 0$，并且

$$p'(t) = \alpha\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t},$$
$$\alpha - (\alpha+\beta)p(t) = \alpha - \alpha\big(1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}\big) = \alpha\,\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}.$$

两者相等，所以 p 同时满足微分方程和初始条件，正如所求。



图中可见 p 由 0 开始，以初始斜率 α 上升，并趋向长期水平 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$。

期望补胎时间

设 R 为在 $[0,T]$ 期间用于补胎的时间，并设 $I(t)$ 在我于时刻 t 正在补胎时取值 1，否则取值 0，于是 $R = \int_0^T I(t)\,\mathrm{d}t$。由于 $\mathrm{E}(I(t)) = p(t)$，取期望值（同样只是线性性质，把积分

看成各小区间上求和的极限）便得

$$\mathrm{E}(R) = \int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left[t + \frac{\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}}{\alpha+\beta}\right]_0^T$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(T - \frac{1-\mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)T}}{\alpha+\beta}\right).$$

想一想 为甚么补胎时间的期望值会等于一个概率的积分?

在每个小区间 $(t, t+\delta t)$ 内，用于补胎的时间以概率 $p(t)$ 约为 δt，否则为 0，所以它的期望值是 $p(t)\,\delta t$。把所有区间加起来，便得 $\sum p(t)\,\delta t \to \int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t$。

两个近似

记 $x = (\alpha+\beta)T$。旅程中用于补胎的时间所占比例的期望值是

$$F = \frac{\mathrm{E}(R)}{T} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(1 - \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}\right).$$

x 很小。利用 $\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \cdots$，可得 $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + O(x^2)$，所以

$$F \approx \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{x}{2} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{(\alpha+\beta)T}{2} = \frac{\alpha T}{2}.$$

这是合理的：在短途旅程中 $p(t) \approx \alpha t$，它在 $[0, T]$ 上的平均值正是 $\alpha T/2$。

x 很大。这时 $0 < \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} < \dfrac{1}{x}$，而后者很小，所以

$$F \approx \frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

在长途旅程中，$p(t)$ 几乎在所有时间都已稳定在平衡值 $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$。

验算

- 平衡状态：令 $p' = 0$，得 $\alpha(1-p) = \beta p$，即“流入率等于流出率”，所以 $p = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$，与 T 很大时的极限吻合。
- 若 $\beta \to \infty$（补胎瞬间完成），一切与补胎有关的量都趋向 0，理应如此。
- 取 $\alpha = 0.7$、$\beta = 2.3$、$T = 2.5$，公式给出 $\mathrm{E}(R) \approx 0.5056$。模拟 2×10^5 次旅程（踏单车与补胎的时段交替出现，长度均服从指数分布）所得结果为 0.5058；而模拟在踏单车时间 2.5 内的爆胎次数，平均值为 $1.750 = \alpha T$。

常见错误

- 在爆胎一项漏掉因子 $(1-p(t))$：只有正在踏单车时才会爆胎。
- 取 $p(0)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$，或没有写明初始条件；单车出发时状态良好，所以 $p(0)=0$。
- 在 x 很小时的展开式中漏掉二阶项，结果得出 $F\approx 0$ 而非 $\alpha T/2$。

STEP 之外

这是一条两状态的连续时间马可夫链（continuous-time Markov chain）：单车以速率 α 和 β 在“运作正常”与“正在修补”两个状态之间来回转换，而 p 所满足的方程正是柯尔莫哥洛夫（Kolmogorov）前向方程最简单的情形。同一个模型也可用来描述会发生故障并获维修的机器、离子通道的开合，以及排队论（queueing theory）中的许多内容。以踏单车时间计算的爆胎次数，是一个速率为 α 的泊松过程（Poisson process）。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）以恰到好处的程度讲解泊松过程和马可夫链。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。