详细解答

STEP III 1996，第 11 题

力学 · 微小振动

> **STEP III 1996，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s3-q11

关键思路

整道题靠两个圆几何的事实。AC 是直径，所以角 ABC 是直角。由此可得两条弦线的长度，从而以 θ 表示两个张力（tension）。另外，圆心角是圆周角的两倍，所以 B 绕圆心转过了 2θ。因此它由 C 起计的弧长是 $2a\theta$，再沿切线方向应用牛顿第二定律（Newton's second law），便得到运动方程（equation of motion）。至于振动，则在平衡位置（equilibrium）附近作线性化（linearise）。

动笔之前先提醒一点：题目印出的方程中有 $mg\sin\theta$，其实应该是 $mg\sin 2\theta$。下面的推导会说明原因，而且只有修正后的方程才能得出题目所述的 $5\lambda = 24mg$ 和所述的周期。

解答

运动方程

模型。小环 B 是光滑金属线上一个质量为 m 的质点（particle），所以金属线只施加沿半径方向的法向反作用力（normal reaction）R。两条弦线都是轻而有弹性的，并且遵从胡克定律（Hooke's law）：自然长度为 a 的弦线被拉长至长度 ℓ 时，张力为 $\lambda(\ell - a)/a$。

几何。由于 AC 是直径（长度为 $2a$），由半圆上的圆周角可知 $\angle ABC = 90°$。在直角三角形 ABC 中，

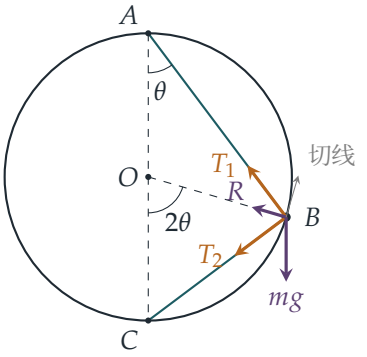
$$AB = 2a\cos\theta, \qquad CB = 2a\sin\theta.$$

圆周角 $\angle CAB = \theta$ 所对的弧是 CB，所以圆心角是 $\angle COB = 2\theta$。由 C 到 B 的弧长是 $s = 2a\theta$，所以 B 沿金属线、朝 θ 增加的方向（即朝向 A）的加速度是 $\ddot{s} = 2a\ddot{\theta}$。

张力。BA 和 BC 的张力分别是

$$T_1 = \lambda\,\frac{2a\cos\theta - a}{a} = \lambda(2\cos\theta - 1), \qquad T_2 = \lambda(2\sin\theta - 1).$$

两条弦线同时拉紧，当且仅当 $\cos\theta > \frac{1}{2}$ 及 $\sin\theta > \frac{1}{2}$，即 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}$。



沿 B 点的切线方向分解。切线与 OB 垂直，而 R 在切线方向没有分量。

- 三角形 OAB 是等腰三角形（$OA = OB = a$），所以 $\angle OBA = \angle OAB = \theta$。因此 BA 与切线的夹角是 $90° - \theta$，而 T_1 的贡献是朝向 A 的 $T_1\sin\theta$。
- 三角形 OCB 是等腰三角形，而 $\angle OCB = \angle ACB = 90° - \theta$，所以 $\angle OBC = 90° - \theta$。因此 BC 与切线的夹角是 θ，而 T_2 的贡献是背向 A 的 $T_2\cos\theta$。
- OB 与向下的铅垂线的夹角是 2θ，所以切线与水平线的夹角是 2θ。重力的贡献是背向 A 的 $mg\sin 2\theta$。

沿切线方向应用牛顿第二定律，得

$$\begin{aligned} 2ma\ddot{\theta} &= \lambda(2\cos\theta - 1)\sin\theta - \lambda(2\sin\theta - 1)\cos\theta - mg\sin 2\theta \\ &= \lambda(\cos\theta - \sin\theta) - mg\sin 2\theta, \end{aligned}$$

因为两个 $2\lambda\sin\theta\cos\theta$ 项互相抵消。这就是所求的方程，只是重力项是 $mg\sin 2\theta$，而不是题目印出的 $mg\sin\theta$。

> ? **想一想** 题目印出的 $mg\sin\theta$ 会不会其实才是对的?

不会。当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时，小环与 O 同高，切线是铅垂的，整个重量 mg 都沿金属线方向作用。这样 $mg\sin 2\theta = mg$，但 $mg\sin\theta = mg/\sqrt{2}$。下一部分同样可以作出判断：按题目印出的方程，平衡时会得到 $\lambda = 3mg$，而不是 $\frac{24}{5}mg$。

平衡位置

当 $\sin\theta = \frac{3}{5}$ 时，$\cos\theta = \frac{4}{5}$（取 θ 为锐角），而且 θ 在弦线拉紧的范围之内，因为 $\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$ 及 $\frac{4}{5} > \frac{1}{2}$。设 $\ddot{\theta} = 0$：

$$\lambda\left(\tfrac{4}{5} - \tfrac{3}{5}\right) = mg \cdot 2 \cdot \tfrac{3}{5} \cdot \tfrac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\lambda}{5} = \frac{24mg}{25} \quad \Longrightarrow \quad 5\lambda = 24mg,$$

正如所求。

小幅振动

设 $f(\theta) = \lambda(\cos\theta - \sin\theta) - mg\sin 2\theta$，于是 $2ma\ddot{\theta} = f(\theta)$，而在平衡位置 θ_0 有 $f(\theta_0) = 0$。令 $\theta = \theta_0 + \varepsilon$，其中 ε 很小。准确至一阶，$f(\theta_0 + \varepsilon) \approx f'(\theta_0)\,\varepsilon$，其中

$$\begin{aligned} f'(\theta_0) &= -\lambda(\sin\theta_0 + \cos\theta_0) - 2mg\cos 2\theta_0 \\ &= -\tfrac{24}{5}mg \cdot \tfrac{7}{5} - 2mg\left(\tfrac{16}{25} - \tfrac{9}{25}\right) = -\tfrac{168}{25}mg - \tfrac{14}{25}mg = -\tfrac{182}{25}mg. \end{aligned}$$

所以

$$2ma\ddot{\varepsilon} = -\tfrac{182}{25}mg\,\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \ddot{\varepsilon} = -\frac{91g}{25a}\,\varepsilon.$$

这是简谐运动（simple harmonic motion），其中 $\omega^2 = \dfrac{91g}{25a}$。由于 $f'(\theta_0) < 0$，这个平衡是稳定的（stable）。位移很小，所以弦线一直保持拉紧（θ 始终在 θ_0 附近，远在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3})$ 的边界之内）。周期约为

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \cdot 5\sqrt{\frac{a}{91g}} = 10\pi\sqrt{\frac{a}{91g}}.$$

验算

- 当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时，两条弦线的伸长量相同，所以它们在切线方向的作用互相抵消（$\cos\theta - \sin\theta = 0$），而整个重量沿铅垂的切线作用。我们的方程给出 $2ma\ddot{\theta} = -mg$，这是正确的。
- 取 $a = g = m = 1$ 及 $\lambda = 4.8$，我们用位置向量计算了切向力。它在 $\sin\theta = 0.6$ 时为零。由一个小位移开始以数值方法逐步计算运动，得到周期为 3.29328，与 $10\pi/\sqrt{91} \approx 3.29328$ 吻合。

常见错误

- 把弧长当作 $a\theta$。小环绕圆心转过的是 2θ，而不是 θ，所以它的切向加速度是 $2a\ddot{\theta}$。左边的 2 就是这样来的。

- 沿弦的方向分解，而不是沿切线方向分解。反作用力是未知的，所以应沿切线方向分解，把它消去。

STEP 之外

在平衡位置附近作线性化，$\ddot{x} = f(x) \approx f'(x_0)(x - x_0)$，是非线性系统稳定性分析的第一步。当 $f'(x_0) < 0$ 时，它给出稳定性，以及 $\omega^2 = -f'(x_0)$ 的简谐运动。在大学里，这个方法会通过简正模式（normal modes）和矩阵的特征值（eigenvalues）推广到多个自由度（degrees of freedom）的情况。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）是进一步阅读的好选择。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。