详细解答

STEP III 1996，第 10 题

力学 • 涉及摩擦力的平衡

STEP III 1996，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s3-q10

关键思路

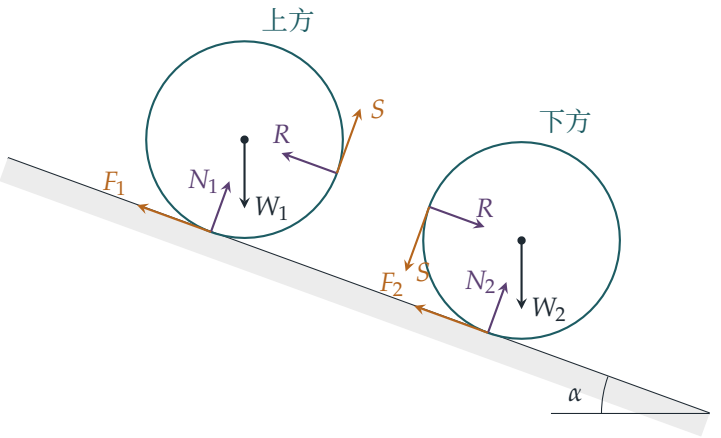
写出六条平衡方程（每个圆柱体各有两条分解力的方程和一条力矩方程），你会发现它们唯一地确定了每一个接触力。力矩方程正是关键所在：每个圆柱体只有两个摩擦力对其中心有力矩，所以这两个摩擦力的大小必定相等。之后，四个不等式中的每一个，都不过是三条接触线之一上的“摩擦力 $\leq$ 摩擦系数 $\times$ 法向反作用力”，再加上两个圆柱体之间的推力不能为负这个条件。

解答

模型。每个圆柱体都是半径为 a 的均匀刚体（uniform rigid body），所以其重量作用于中心（即轴上）。我们在通过两个中心的铅垂截面上考虑问题。由于两个半径相等，而且两个圆柱体都放在斜面上，所以连心线与斜面平行，而两个圆柱体之间的接触点就是该线段的中点。取 x 方向为沿斜面向下，y 方向垂直于斜面并指向斜面之外。

定义以下各力（所有分量最终都可能是正或负）：

- N_1、N_2：斜面对上方和下方圆柱体的法向反作用力（normal reaction）；
- F_1、F_2：斜面对它们的摩擦力（frictional force），以沿斜面向上为正；
- R：两个圆柱体之间的法向力，沿连心线方向，把下方圆柱体推向斜面下方，把上方圆柱体推向斜面上方；
- S：两个圆柱体之间的摩擦力，垂直于斜面，对上方圆柱体的作用方向是远离斜面，因而对下方圆柱体的作用方向是指向斜面（根据牛顿第三定律（Newton's third law））。



（为清楚起见，图中把两个圆柱体分开来画；R 和 S 其实作用于同一条接触线上。每个重量都通过中心铅垂向下作用。）

力矩。对每个圆柱体的中心取力矩（moment）。法向力 N_1、N_2、R 和重量全都通过中心，所以只有摩擦力才有力矩。每个摩擦力都在距离中心 a 之处沿切线方向作用。对上方圆柱体而言，F_1（沿斜面向上，作用于圆柱体底部）和 S（远离斜面，作用于其下坡一侧）的力矩方向相反，由此得

$$aF_1 = aS, \qquad \text{所以} \qquad F_1 = S.$$

同样地，对下方圆柱体而言，F_2（沿斜面向上，作用于其底部）和 S（指向斜面，作用于其上坡一侧）的力矩方向相反，所以 $F_2 = S$。因此

$$F_1 = F_2 = S.$$

想一想 为甚么斜面对每个圆柱体的摩擦力，必定等于两个圆柱体之间的摩擦力？

因为一个可以自由滚动的圆柱体，只有在绕其轴的力偶（couple）互相抵消时才能保持平衡，而摩擦力是唯一对轴有力矩的力。你可以检查一下转向：对上方圆柱体而言，斜面在底部施加的沿斜面向上的摩擦力会令它向下坡方向滚动，即在图中顺时针转动，而作用于其下坡一侧的向上摩擦力则令它逆时针转动。

分解力。平行于斜面（以沿斜面向下为正）：

$$\text{上方：} \quad W_1 \sin\alpha - F_1 - R = 0,$$
$$\text{下方：} \quad W_2 \sin\alpha - F_2 + R = 0.$$

两式相加，并利用 $F_1 = F_2 = S$，得

$$F_1 = F_2 = S = \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha,$$

这正是重量沿斜面向下的总分量的一半，与预期相符。两式相减则得

$$R = \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

垂直于斜面（以向外为正）：

$$\begin{aligned} &\text{上方：} \quad N_1 - W_1\cos\alpha + S = 0 \quad &\Longrightarrow \quad N_1 = W_1\cos\alpha - \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha, \\ &\text{下方：} \quad N_2 - W_2\cos\alpha - S = 0 \quad &\Longrightarrow \quad N_2 = W_2\cos\alpha + \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha. \end{aligned}$$

于是六条方程确定了全部六个力。平衡（equilibrium）可以成立，当且仅当这些力在物理上是容许的：每个法向反作用力都非负，而每个摩擦力都不超过摩擦系数（coefficient of friction）乘以相应的法向反作用力。

第 (i) 部分

两个圆柱体只能互相推压，所以 $R \geq 0$。由于 $\sin\alpha > 0$，由此得 $W_1 \geq W_2$。

第 (ii) 部分

在两个圆柱体的接触处，我们需要 $S \leq \mu R$：

$$\tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha \leq \mu \cdot \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

左边严格为正，所以必须有 $R > 0$，即 $W_1 > W_2$（两个重量相等其实是不可能的）。两边除以正数 $\tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha$，得

$$\mu \geq \frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2},$$

正如所求。

第 (iii) 部分

在上方圆柱体与斜面的接触处，我们需要 $N_1 \geq 0$ 和 $F_1 \leq \mu_1 N_1$。由于 $F_1 > 0$，第二个条件已经迫使 $N_1 > 0$。把 $F_1 \leq \mu_1 N_1$ 两边除以 $\tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha > 0$：

$$1 \leq \mu_1\left(\frac{2W_1\cos\alpha}{(W_1 + W_2)\sin\alpha} - 1\right) = \mu_1\left(\frac{2W_1\cot\alpha}{W_1 + W_2} - 1\right).$$

括号内的式子是 $N_1 / \left(\tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha\right)$，它是正数，所以我们可以用它来除：

$$\mu_1 \geq \left(\frac{2W_1\cot\alpha}{W_1 + W_2} - 1\right)^{-1}.$$

（平衡还需要括号内的式子为正，即 $\tan\alpha < 2W_1/(W_1 + W_2)$；否则上方圆柱体会被撬离斜面。）

关于 μ_2 的不等式

这里 $N_2 = W_2\cos\alpha + \frac{1}{2}(W_1+W_2)\sin\alpha$ 自动为正，而 $F_2 \le \mu_2 N_2$ 在除以 $\frac{1}{2}(W_1+W_2)\sin\alpha$ 之后变成

$$1 \le \mu_2\left(\frac{2W_2\cot\alpha}{W_1+W_2}+1\right), \qquad \text{即} \qquad \mu_2 \ge \left(\frac{2W_2\cot\alpha}{W_1+W_2}+1\right)^{-1}.$$

想一想 为甚么下方圆柱体的符号是 $+1$，而上方圆柱体的却是 -1?

两个圆柱体之间的摩擦力 S 把上方圆柱体拉离斜面，并把下方圆柱体压向斜面。所以斜面对上方圆柱体的压力较小，对下方圆柱体的压力较大，而上方圆柱体就需要较大的摩擦力与法向反作用力之比。

验算

- 把两个圆柱体的方程相加，便得到整个系统的方程：斜面的总摩擦力为沿斜面向上的 $(W_1+W_2)\sin\alpha$，总法向反作用力为 $(W_1+W_2)\cos\alpha$，与单一刚性方块的情况完全一样。
- 当 $\alpha \to 0$ 时，所有摩擦力和 R 都趋向 0，而 μ_1, μ_2 的两个下界也趋向 0，这正是水平地面上应有的情况。
- 数值上，取 $W_1 = 3$、$W_2 = 1$、$\alpha = 20^\circ$：直接解六条方程得 $R \approx 0.342$、$S = F_1 = F_2 \approx 0.684$、$N_1 \approx 2.135$、$N_2 \approx 1.624$，所以 $\mu \ge 2$、$\mu_1 \ge 0.320$ 和 $\mu_2 \ge 0.421$，与公式吻合。我们也对 W_1、W_2 和 α 的许多随机取值作了同样的检查，结果同样吻合。

常见错误

- 忘记力矩方程。没有它们，就有六个未知数而只有四条方程，问题看起来便无法确定。
- 弄错两个圆柱体之间摩擦力的方向，这会把最后两个答案中的 ±1 对调。
- 忽略了较轻的圆柱体必须在下方：假如上方圆柱体较轻，R 就必须为负。

STEP 之外

这是一个静定（statically determinate）系统：平衡方程确定了每一个力，所以摩擦定律就变成可以检验的条件。当接触点的数目多于方程的数目时（例如一把梯子靠在粗糙的墙上并立于粗糙的地面），系统便是静不定（statically indeterminate）的，单靠刚体静力学无法说明各力如何分担。这时工程师便会引入物体的弹性（elasticity）。Kleppner

与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）仔细讲解了刚体平衡和力矩（torque）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。