详细解答

STEP III 1996，第 1 题

纯数学 · 双曲函数的幂

STEP III 1996，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s3-q1

关键思路

把双曲函数（hyperbolic functions）写成指数函数，一切便随之而来。幂 $\cosh^n x$ 变成 $2^{-n}(e^x+e^{-x})^n$，再用二项式定理（binomial theorem）展开成指数函数 $e^{(n-2r)x}$；这些项会成对出现，即 $e^{\pm jx}$，而每一对就是一个 $\cosh jx$。$\sinh^{2m} x$ 的同类展开式只差在正负号交替，所以相加或相减时，每隔一项便会消去。

解答

定义与两条恒等式

我们定义

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

由此立即得到两个结果。由于 $\cosh x + \sinh x = e^x$ 及 $\cosh x - \sinh x = e^{-x}$，

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = (\cosh x + \sinh x)(\cosh x - \sinh x) = e^x e^{-x} = 1.$$

把定义式平方，得 $\cosh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})$ 及 $\sinh^2 x = \frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x})$，所以

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = \tfrac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x}) = \cosh 2x,$$

再与恒等式（identity）$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ 相加或相减，得

$$\cosh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x + 1), \qquad \sinh^2 x = \tfrac{1}{2}(\cosh 2x - 1).$$

最后这两条式子对任何自变量都成立，所以我们可以把当中的 x 换成 $2x$。

现在把平方差（difference of squares）因式分解：

$$\cosh^4 x - \sinh^4 x = (\cosh^2 x - \sinh^2 x)(\cosh^2 x + \sinh^2 x) = 1 \cdot \cosh 2x = \cosh 2x,$$

这正是所求。至于两者之和，先配方（complete the square），再利用 $\cosh x \sinh x = \frac{1}{4}(e^{2x} - e^{-2x}) = \frac{1}{2}\sinh 2x$：

$$\begin{aligned}\cosh^4 x + \sinh^4 x &= (\cosh^2 x + \sinh^2 x)^2 - 2\cosh^2 x \sinh^2 x \\ &= \cosh^2 2x - \tfrac{1}{2}\sinh^2 2x \\ &= \tfrac{1}{2}(\cosh 4x + 1) - \tfrac{1}{4}(\cosh 4x - 1) \\ &= \tfrac{1}{4}\cosh 4x + \tfrac{3}{4},\end{aligned}$$

这就是第二条恒等式。

系数 a_k

根据二项式定理，

$$\cosh^n x = \frac{1}{2^n}\left(e^x + e^{-x}\right)^n = \frac{1}{2^n}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}e^{(n-2r)x}.$$

把下标为 r 的项与下标为 $n-r$ 的项配成一对。由于 $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$，两者的系数（coefficient）相同，而指数则互为相反数 $\pm(n-2r)x$，所以两项合起来就是 $2\binom{n}{r}\cosh((n-2r)x)$。

> **想一想** 究竟哪些 $\cosh kx$ 会真正出现？中间项又会怎样？

指数 $n-2r$ 依次为 $n, n-2, n-4, \ldots$，所以只有与 n 奇偶性（parity）相同的 k 才会出现。设 $k = n-2r$，则当 $1 \le k \le n$ 时，$\cosh kx$ 的系数为 $2\cdot 2^{-n}\binom{n}{r}$，其中 $r = \frac{1}{2}(n-k)$。当 n 为偶数时，还有一个没有配对的中间项 $r = \frac{n}{2}$，给出常数 $2^{-n}\binom{n}{n/2}$。因此

$$a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{n-1}}\dbinom{n}{\frac{1}{2}(n-k)} & \text{若} 1 \le k \le n \text{ 且} n-k \text{ 为偶数,} \\ 0 & \text{若} n-k \text{ 为奇数,} \end{cases} \qquad a_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{\frac{1}{2}n} & n \text{ 为偶数,} \\ 0 & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

例如，$\cosh^5 x = \frac{5}{8}\cosh x + \frac{5}{16}\cosh 3x + \frac{1}{16}\cosh 5x$。

最后部分

取 $n = 2m$，以同样方法展开 $\sinh^{2m} x$：

$$\sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{r=0}^{2m}(-1)^r\binom{2m}{r}e^{(2m-2r)x}.$$

由于 $(-1)^{2m-r} = (-1)^r$，第 r 项与第 $2m-r$ 项仍然可以配对，所以

$$\sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{r=0}^{2m} (-1)^r \binom{2m}{r} \cosh(2(m-r)x),$$

这就是 $\cosh^{2m} x$ 的展开式（以同样形式写出，并利用 cosh 是偶函数）加上交替的正负号。相减及相加，得

$$\cosh^{2m} x \mp \sinh^{2m} x = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{r=0}^{2m} (1 \mp (-1)^r) \binom{2m}{r} \cosh(2(m-r)x).$$

所以两者之差只保留 r 为奇数的项（每项都变成两倍），两者之和则只保留 r 为偶数的项。像之前一样把 r 与 $2m-r$ 两项合并，并设 $k = 2j = 2(m-r)$，便得到

$$\cosh^{2m} x - \sinh^{2m} x = b_0 + \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ m-j \text{ 为奇数}}} \frac{1}{2^{2m-2}} \binom{2m}{m-j} \cosh 2jx,$$

$$\cosh^{2m} x + \sinh^{2m} x = c_0 + \sum_{\substack{1 \le j \le m \\ m-j \text{ 为偶数}}} \frac{1}{2^{2m-2}} \binom{2m}{m-j} \cosh 2jx,$$

其中常数项来自没有配对的中间项 $r = m$：当 m 为奇数时，它保留在差之中；当 m 为偶数时，它保留在和之中：

$$b_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2m-1}} \binom{2m}{m} & m \text{ 为奇数}, \\ 0 & m \text{ 为偶数}, \end{cases} \qquad c_0 = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{2m-1}} \binom{2m}{m} & m \text{ 为偶数}, \\ 0 & m \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

用文字来说：当 k 为奇数时，$\cosh kx$ 的系数为 0。当 $k = 2j \ge 2$ 为偶数时，若 $m-j$ 为奇数，则它在差之中的系数为 $2^{2-2m}\binom{2m}{m-j}$；若 $m-j$ 为偶数，则它在和之中的系数为此值；其余情况系数均为 0。取 $m = 2$，差为 $\frac{1}{4}\binom{4}{1}\cosh 2x = \cosh 2x$，而和为 $\frac{1}{8}\binom{4}{2} + \frac{1}{4}\binom{4}{0}\cosh 4x = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cosh 4x$，正好重现我们最初证明的两条恒等式。

验算

代入 $x = 0$：每个 $\cosh kx$ 都变成 1，所以各 a_k 之和必须等于 1（确实如此：二项式系数之和为 2^n），而最后两条展开式的系数之和也必须等于 1。当 $m = 3$ 时，公式给出 $\cosh^6 x - \sinh^6 x = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cosh 4x$ 及 $\cosh^6 x + \sinh^6 x = \frac{15}{16}\cosh 2x + \frac{1}{16}\cosh 6x$。在 $x = 1$ 处，第一条式子的两边准确至四位有效数字均为 10.87，用计算机可以核实。我们已就 $n \le 12$ 及 $m \le 8$，在随机选取的 x 值处以数值方法验证了所有公式。

常见错误

- 把中间项加倍：当 n 为偶数时，$r = \frac{n}{2}$ 的一项没有配对的伙伴，所以 a_0 是 $2^{-n}\binom{n}{n/2}$，而不是它的两倍。
- 忘记了只要 k 与 n 的奇偶性相反，就有 $a_k = 0$。
- 以为最后部分必定有常数项。其实常数项只在 m 为奇数时出现于差之中，只在 m 为偶数时出现于和之中。

STEP 之外

把 $\cosh x$（或 $\cos x$）的幂写成 $\cosh kx$ 的组合，是初尝傅里叶分析（Fourier analysis）的滋味：e^{ikx} 是天然的基本构件，而 $\cos^n x$ 则是一个有限傅里叶级数（Fourier series），其系数都是二项式系数。把这个过程倒过来，将 $\cos nx$ 表示成 $\cos x$ 的多项式，便得到切比雪夫多项式（Chebyshev polynomials），它们在逼近理论（approximation theory）中十分重要。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）说明了为甚么指数形式会令这些恒等式都显得顺理成章。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。