详细解答

STEP II 1996，第 9 题

力学 · 稳定性与质心

> **STEP II 1996，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q9

关键思路

一切取决于玩具的质心（centre of mass）G 在其对称轴（axis of symmetry）上的位置。以半球体（hemisphere）着地时，桌面与玩具的接触点总是在半球体平面圆心 O 的正下方，所以 G 在 O 之下还是之上，就决定了玩具是“自行回正”还是“翻倒”。以圆锥（cone）着地时，玩具沿着一整条母线（generator）靠在桌面上，只要通过 G 的铅垂线与这条接触线相交，玩具便会留在原处。

解答

把玩具看成密度为 ρ 的均匀刚体（rigid body），并关于其轴对称。设 O 为公共圆面的圆心，沿轴由 O 起量度距离，以指向圆锥顶点（vertex）V 的方向为正。

质心

圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi a^2(\lambda a) = \frac{1}{3}\lambda\pi a^3$，其质心位于 $+\frac{1}{4}\lambda a$。半球体的体积为 $\frac{2}{3}\pi a^3$，其质心位于 $-\frac{3}{8}a$。所以 G 位于

$$h = \frac{\frac{1}{3}\lambda\cdot\frac{1}{4}\lambda a - \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}a}{\frac{1}{3}\lambda + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{12}\lambda^2 a - \frac{1}{4}a}{\frac{1}{3}(\lambda+2)} = \frac{a(\lambda^2-3)}{4(\lambda+2)}.$$

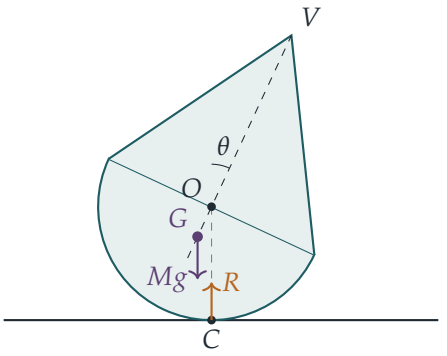
因此，G 在 O 之下，若 $\lambda < \sqrt{3}$；恰在 O，若 $\lambda = \sqrt{3}$；在 O 之上，若 $\lambda > \sqrt{3}$。

以半球体着地

设轴与向上的铅垂线成角 θ，其中 $0 \le \theta < \frac{1}{2}\pi$，使半球体的曲面落在桌面上。

想一想 半球体究竟在哪一点接触桌面?

桌面与半球体所属的球面相切，而切平面（tangent plane）垂直于通过切点的半径。所以接触点 C 总是在 O 的正下方，而且 O 的高度总是 a，不论 θ 是多少。



（图中所示为 G 在 O 之下的情况，即 $\lambda < \sqrt{3}$。）

对 C 取力矩（moment）。法向反作用力（normal reaction）和任何摩擦力（friction）都作用于 C，所以只有作用于 G 的重量 Mg 产生力矩。G 相对于 C（亦即相对于通过 O 的铅垂线）的水平位移为 $h\sin\theta$，以顶点倾侧的一方为正。

- 若 $\lambda < \sqrt{3}$，则 $h < 0$。对于 $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$ 内的每一个 θ，G 都位于通过 C 的铅垂线的另一侧，与顶点相反。所以重量会把玩具转回 $\theta = 0$ 的方向。换一个说法，G 的高度为 $a + h\cos\theta = a - |h|\cos\theta$，在 $\theta = 0$ 时最小，所以直立位置就是势能（potential energy）最小的位置。无论用哪一种看法，不管以半球体的哪一处着地，玩具都会回到直立位置（它会在该位置附近来回摇摆，直至摩擦力和空气阻力令它停定）。
- 若 $\lambda > \sqrt{3}$，则 $h > 0$。对于任何倾角 $\theta > 0$，G 都位于顶点的同一侧，重量会把玩具转得更加偏离直立位置。此时 G 的高度 $a + h\cos\theta$ 在 $\theta = 0$ 时最大，所以直立是不稳定平衡（unstable equilibrium）。最轻微的倾侧也会不断扩大，直至边缘碰到桌面，玩具倒在它的圆锥面上：它翻倒了。

（当 $\lambda = \sqrt{3}$ 时，$G = O$，玩具在任何倾角下都处于随遇平衡（neutral equilibrium）。）这就是所要求的结果。

以圆锥着地

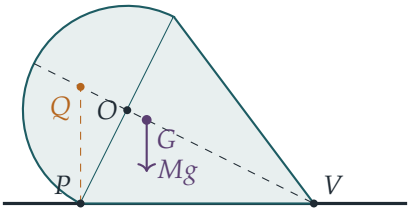
现在玩具以圆锥的一条母线 VP 贴着桌面躺下，其中 P 在边缘上。我们在通过轴和 VP 的平面内考虑。在此平面内取坐标轴，以 O 为原点，$V = (0, \lambda a)$ 及 $P = (a, 0)$，于是半球体位于 $y < 0$ 的一侧。圆锥沿 VP 的切平面垂直于这个平面，它在这个平面上的迹线

是直线

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda a}=1.$$

想一想 半球体会不会反而穿过桌面，以致圆锥无法以一条母线平贴桌面?

不会。玩具上每一点投影到这个平面上，都落在圆锥的三角形截面内，或落在半圆盘 $x^2+y^2\le a^2$，$y\le 0$ 内。在三角形上，$\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda a}\le 1$。在半圆盘上，$x\le a$ 且 $y\le 0$，所以 $\frac{x}{a}+\frac{y}{\lambda a}\le \frac{x}{a}\le 1$，等号仅在 P 成立。所以整个玩具都在该平面的同一侧，只沿线段 VP 与平面接触，别无其他接触点。



（图中所示为 $\lambda=2$ 的情况。虚线是 VP 在 P 处的垂线。）

所有反作用力都作用在 VP 上，并且垂直于桌面。所以玩具在桌面上处于平衡（equilibrium），而且不会绕 P 或 V 翻转，当且仅当通过 G 的铅垂线与线段 VP 相交，即由 G 到 VP 的垂足（foot of the perpendicular）位于 V 与 P 之间。

VP 在 V 处的垂线只在 V 与轴相交。设 VP 在 P 处的垂线与轴相交于 Q。在三角形 VPQ 中，P 处的角是直角，而 PO 是斜边（hypotenuse）VQ 上的高，所以 $OP^2=OV\cdot OQ$，由此得

$$OQ=\frac{a^2}{\lambda a}=\frac{a}{\lambda}.$$

所以 Q 在 O 之下，距离为 a/λ。轴上的一点投影到线段 VP 上，当且仅当该点位于 Q 与 V 之间。所以我们需要

$$-\frac{a}{\lambda}<h<\lambda a.$$

右边的不等式成立，因为 G 在玩具内部，位于 V 之下。至于左边的不等式，两边乘以 $4\lambda(\lambda+2)/a>0$，

$$\frac{a(\lambda^2-3)}{4(\lambda+2)}>-\frac{a}{\lambda}\iff \lambda^3-3\lambda+4\lambda+8>0\iff \lambda^3+\lambda+8>0,$$

这对每一个 $\lambda>0$ 都成立。所以通过 G 的铅垂线总与接触线相交，玩具留在原处不动。由旋转对称性可知，哪一条母线与桌面接触也没有分别。所以不论 λ 取何值，玩具都会停留在它的圆锥面上，这正是所要证明的。

验算

- 当 $\lambda = \sqrt{3}$ 时，公式给出 $h = 0$：圆锥的矩 $\frac{1}{12}\lambda^2 a$ 恰好与半球体的 $\frac{1}{4}a$ 平衡。把玩具切成薄圆片再以数值方法求和，对数个不同的 λ 所得的 h 都吻合，误差在 $10^{-5}a$ 以内。
- 取 $\lambda = 1$：$h = -\frac{1}{6}a$ 且 $OQ = a$，而由 G 所作垂线的垂足位于由 V 到 P 全程的 0.583 处。取 $\lambda = 10$ 时，垂足位于全程的 0.790 处。在 $(0, 50)$ 内随机抽取 20,000 个 λ 的值作测试，垂足每次都严格落在 VP 之内。
- 极限情况：当 $\lambda \to 0$ 时，玩具几乎就是一个半球体（$h \to -\frac{3}{8}a$），而半球体会自行回正是众所周知的。当 $\lambda \to \infty$ 时，玩具是一个长长的圆锥，G 随着圆锥本身的质心沿轴上移。

常见错误

- 对直立玩具的最低点取力矩，而不是对实际的接触点取力矩；接触点会随玩具滚动而移动，但总是在 O 的正下方。
- 在最后一部分，以为半球体也接触桌面。其实并没有，因为半圆盘位于 $y \leq 0$ 的一侧。

STEP 之外

这个摇摆玩具让我们初次接触平衡的稳定性（stability）。一般而言，在平面上滚动的物体，当其质心低于其表面在接触点处的曲率中心（centre of curvature）（在这里即是 O）时，便是稳定的。同样的想法也支配着浮船的稳心（metacentre）。在大学一年级的课程中，这会发展成对势能极小值以及在其附近的小振动（small oscillations）的研究。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）正是以这种精神讲述质心和刚体平衡。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。