详细解答

STEP II 1996，第 8 题

纯数学 · 二阶微分方程

STEP II 1996，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s2-q8

关键思路

这条方程把 $\mathrm{f}(x)$ 和 $\mathrm{f}(-x)$ 混在一起,所以它根本不是 f 的常微分方程(ordinary differential equation)。窍门是把方程写两次，一次在 x，一次在 $-x$，然后相加和相减。和 g 与差 h 各自满足一条货真价实的常系数方程（constant-coefficient equation），可以用余函数（complementary function）和特别积分（particular integral）求解，而 f 则可由 $\frac{1}{2}(\mathrm{g}+\mathrm{h})$ 还原出来。

解答

$\mathrm{g}(0)$ 和 $\mathrm{g}'(0)$ 的值

在 $\mathrm{g}(x)=\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(-x)$ 中代入 $x=0$，得 $\mathrm{g}(0)=2\mathrm{f}(0)=2$。

求导时，链式法则（chain rule）令第二项多出一个负号：

$$\mathrm{g}'(x)=\mathrm{f}'(x)-\mathrm{f}'(-x),$$

所以 $\mathrm{g}'(0)=\mathrm{f}'(0)-\mathrm{f}'(0)=0$，正如所求。（留意我们并不需要 $\mathrm{f}'(0)$ 的值：g 是偶函数（even function），所以它的导数是奇函数（odd function），在 0 处必为零。）

g 所满足的方程

再求导一次，链式法则带来的两个负号互相抵消：

$$\mathrm{g}''(x)=\mathrm{f}''(x)+\mathrm{f}''(-x).$$

想一想 $f''(-x)$ 是甚么？题目给出的方程只告诉我们 $f''(x)$ 的情况。

题目给出的方程对所有 x 都成立，所以我们可以把式中的 x 全部换成 $-x$。由于 cos 是偶函数，这样便得到

$$f''(-x) + f(x) = -x + 3\cos 2x.$$

把这条式与原方程相加，

$$f''(x) + f''(-x) + f(-x) + f(x) = 6\cos 2x, \qquad \text{即} \qquad g''(x) + g(x) = 6\cos 2x,$$

正如所求。

求解 g

辅助方程 (auxiliary equation) $m^2 + 1 = 0$ 的根是 $\pm i$, 所以余函数是 $A\cos x + B\sin x$。至于特别积分，我们试用 $g = k\cos 2x$：这时 $g'' + g = -4k\cos 2x + k\cos 2x = -3k\cos 2x$，所以 $k = -2$。因此

$$g(x) = A\cos x + B\sin x - 2\cos 2x.$$

现在由 $g(0) = A - 2 = 2$ 得 $A = 4$，而 $g'(0) = B = 0$。所以

$$g(x) = 4\cos x - 2\cos 2x.$$

求解 h

对于 $h(x) = f(x) - f(-x)$，我们有

$$h(0) = 0, \qquad h'(x) = f'(x) + f'(-x), \quad \text{所以} \quad h'(0) = 2f'(0) = -2,$$

以及 $h''(x) = f''(x) - f''(-x)$。这次我们从在 x 的方程减去在 $-x$ 的方程：

$$f''(x) - f''(-x) + f(-x) - f(x) = 2x, \qquad \text{即} \qquad h''(x) - h(x) = 2x.$$

想一想 为甚么 h 前面的符号由 + 变成了 −?

相减之后，f 的各项以 $f(-x) - f(x)$ 的形式出现，这是 $-h(x)$，而不是 $+h(x)$。所以这次的解是指数函数而不是三角函数：辅助方程 $m^2 - 1 = 0$ 给出余函数 $Ce^x + De^{-x}$。试用 $h = px + q$ 作为特别积分，得 $-(px + q) = 2x$，所以 $p = -2$，$q = 0$。因此

$$h(x) = Ce^x + De^{-x} - 2x.$$

由初始条件得 $h(0) = C + D = 0$ 和 $h'(0) = C - D - 2 = -2$，所以 $C = D = 0$，而

$$h(x) = -2x.$$

还原 f

把 g 和 h 的定义相加，得 $\mathrm{g}+\mathrm{h}=2\mathrm{f}$，所以

$$\mathrm{f}(x)=\tfrac{1}{2}(\mathrm{g}(x)+\mathrm{h}(x))=\tfrac{1}{2}(4\cos x-2\cos 2x-2x)=2\cos x-\cos 2x-x,$$

这就是所求的结果。

验算

- $\mathrm{f}(0)=2-1-0=1$，而 $\mathrm{f}'(x)=-2\sin x+2\sin 2x-1$，所以 $\mathrm{f}'(0)=-1$。
- 代回原方程：$\mathrm{f}''(x)=-2\cos x+4\cos 2x$ 和 $\mathrm{f}(-x)=2\cos x-\cos 2x+x$，两者相加得 $x+3\cos 2x$。
- 奇偶性（parity）正确：g 是偶函数，h 是奇函数，理应如此。
- 把 $\mathrm{f}(x)$、$\mathrm{f}(-x)$ 这一对函数由 $x=0$ 逐步数值计算至 $x=3$，得 $\mathrm{f}(3)\approx -5.940155$，与 $2\cos 3-\cos 6-3$ 吻合。

常见错误

- 忘记链式法则带来的符号：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{f}(-x)=-\mathrm{f}'(-x)$，但 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{f}(-x)=+\mathrm{f}''(-x)$。
- 只在方程的其中一边把 x 换成 $-x$：右边的 x 同样要变成 $-x$。
- 得出 $\mathrm{h}''+\mathrm{h}=2x$，结果 h 中出现了三角函数项。

STEP 之外

这是一条泛函微分方程（functional differential equation），当中未知函数在多于一点取值。拆成偶部和奇部之所以行得通，是因为反射 $x\mapsto -x$ 是一个线性映射（linear map），而且它的平方是恒等映射（identity），所以它的特征值（eigenvalue）是 ± 1，每个函数都可以唯一地分解为偶部（特征值 1）和奇部（特征值 -1）。在每一部分上，方程都变成一条常微分方程。这种按对称性分解的想法贯穿整个线性代数（linear algebra）和傅里叶分析（Fourier analysis）。关于常系数方程本身，可参阅 Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（微分方程入门教材）；关于线性代数的观点，可参阅 Strang, *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。