详细解答

STEP II 1996，第 7 题

纯数学 · 坐标几何中的轨迹

STEP II 1996，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s2-q7

关键思路

为正方形设置坐标，使它对两条坐标轴都对称。这样每个距离都是一个线性式的绝对值（modulus），而两个乘积 pr 和 qs 就变成 $|y^2 - a^2|$ 和 $|x^2 - a^2|$。形如 $|U| = |V|$ 的方程可分拆为 $U = V$ 或 $U = -V$。其中一种情况给出两条直线，另一种情况给出圆。

解答

设正方形的边长为 $2a$（其中 $a > 0$），中心位于原点，各边与坐标轴平行：

$$A = (-a, -a), \quad B = (a, -a), \quad C = (a, a), \quad D = (-a, a).$$

于是 AB 位于直线 $y = -a$ 上，BC 位于 $x = a$ 上，CD 位于 $y = a$ 上，DA 位于 $x = -a$ 上。由 $P = (x, y)$ 到水平线 $y = c$ 的垂直距离（perpendicular distance）是 $|y - c|$，到铅垂线 $x = c$ 的垂直距离则是 $|x - c|$。所以

$$p = |y + a|, \qquad q = |x - a|, \qquad r = |y - a|, \qquad s = |x + a|.$$

这些公式对平面上每一点 P 都成立，不论它在正方形之内还是之外。正是绝对值确保了距离非负，所以我们绝不能把它们略去。

两两相乘，并利用 $|u|\,|v| = |uv|$，得

$$pr = |(y + a)(y - a)| = |y^2 - a^2|, \qquad qs = |(x - a)(x + a)| = |x^2 - a^2|.$$

想一想 怎样才能去掉 $|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$ 中的绝对值，而又不必分成许多区域来讨论？

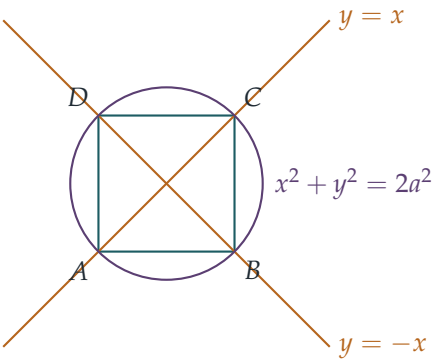
对实数而言，$|U| = |V|$ 成立当且仅当（if and only if）$U = V$ 或 $U = -V$，因为两边都非负，而且 $|U| = |V| \iff U^2 = V^2 \iff (U - V)(U + V) = 0$。由于我们每一步用的都是“当且仅当”的推论，所以必要条件（necessary condition）和充分条件（sufficient condition）会同时得到。因此 $pr = qs$ 成立当且仅当

$$y^2 - a^2 = x^2 - a^2 \qquad 或 \qquad y^2 - a^2 = -(x^2 - a^2).$$

第一种情况。 $y^2 = x^2$，即 $(y - x)(y + x) = 0$，所以 $y = x$ 或 $y = -x$。这就是通过正方形中心、分别包含对角线 AC 和 BD 的两条（无限延伸的）直线。

第二种情况。 $x^2 + y^2 = 2a^2$。这是以正方形的中心为圆心、半径为 $\sqrt{2}\,a$ 的圆，而这个半径正是对角线的一半。所以它是正方形的外接圆（circumcircle），通过 A、B、C 和 D。

因此，$pr = qs$ 迫使 P 必须位于两条对角线所在的直线 AC、BD（无限延长）其中之一上，或位于 $ABCD$ 的外接圆上。反过来说，以上每一步都是可逆的。若 P 在其中一条直线上，则 $x^2 = y^2$，所以 $|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$。若 P 在圆上，则 $y^2 - a^2 = a^2 - x^2$，同样得到 $|y^2 - a^2| = |x^2 - a^2|$。无论哪种情况都有 $pr = qs$，所以两条直线和圆上的每一点都是 P 的可能位置。证明至此完成。



想一想 正方形以外的点真的可以吗？那两条直线会在顶点处终止吗？

题目容许平面上的任何一点，而我们的距离公式在整个平面上都成立。所以轨迹（locus）是每条直线的全部，而不仅是作为线段的对角线。例如，$P = (3a, 3a)$ 有 $p = 4a$、$r = 2a$、$q = 2a$、$s = 4a$，所以 $pr = qs = 8a^2$。

验算

- 中心 $(0,0)$ 同时在两条直线上：$p = q = r = s = a$，所以 $pr = qs$。
- 取圆上位于 AB 中点正下方的一点，即 $(0, -\sqrt{2}\,a)$。这时 $p = (\sqrt{2} - 1)a$，$r = (\sqrt{2} + 1)a$，所以 $pr = a^2$；又 $q = s = a$，所以 $qs = a^2$。

- 不在轨迹上的点，例如 $(\frac{1}{2}a, 0)$，给出 $pr = a^2$ 但 $qs = \frac{3}{4}a^2$，所以它不符合条件。
- 数值上（取 $a = 1.7$），在三条曲线上随机抽取的 30 000 个点处，$pr = qs$ 都成立，误差在 10^{-9} 以内。在 $[-5, 5]^2$ 上以 600×600 的网格扫描 $pr - qs$ 的正负号变化，除了两条直线和圆之外，没有发现其他零点。

常见错误

- 略去绝对值，写成 $pr = a^2 - y^2$、$qs = a^2 - x^2$。这只在正方形内部才成立，而且会遗漏了圆，只得出 $y = \pm x$。
- 只证明 P 必须位于这些曲线上。题目还要求证明逆命题（converse），所以要说明为何直线和圆上的每一点都符合条件。
- 把那两条直线说成是对角*线段* AC 和 BD。它们是完整的直线。

STEP 之外

这个轨迹是多项式 $(y^2 - a^2)^2 - (x^2 - a^2)^2$ 的零点集（zero set），而这个多项式可因式分解为 $(y - x)(y + x)(x^2 + y^2 - 2a^2)$。由多项式方程给出、并且像这样分拆成较简单部分的曲线，正是可约（reducible）*代数曲线*（algebraic curve）的第一个例子。按照图形的对称性来选取坐标，正是让这类因式分解显现出来的好习惯。想看更多这种风格的几何题，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；至于曲线的代数理论，可参阅 Reid 的 *Undergraduate Algebraic Geometry*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。