详细解答

STEP II 1996，第 6 题

纯数学 · 因数的计数

> **STEP II 1996，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q6

关键思路

N 的每一个因数（factor），都是这样构成的：对每个质数（prime）p_i 独立地选择取多少个，可取 0 至 m_i 个。数清这些选择的数目，就数清了所有因数，然后再剔除 1 和 N。此后，两道搜索题都变成关于指数（exponent）的问题：哪些指数组合能给出所需的个数，以及怎样把这些指数分配到各质数上，使 N 尽可能小。

解答

开首的例子

12 的因数是 $1, 2, 3, 4, 6, 12$。剔除 1 和 12 后余下 $2, 3, 4, 6$，即有 4 个真因数（proper factor）。16 的因数是 $1, 2, 4, 8, 16$。剔除 1 和 16 后余下 $2, 4, 8$，即有 3 个真因数。

一般情况的计数

设 M 整除 N。那么 M 的每个质因数都是 N 的质因数，而且它在 M 中出现的次数不能多于在 N 中出现的次数。所以

$$M = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_r^{a_r}, \qquad 0 \le a_i \le m_i.$$

反过来，每个这样的乘积都整除 N。根据质因数分解的唯一性（uniqueness of prime factorisation），不同的 $(a_1, \ldots, a_r)$ 给出不同的整数 M。因此 N 的因数与这些选择一一对应。每个 a_i 有 $m_i + 1$ 种选择，而且各自独立，所以 N 一共有

$$d(N) = (m_1 + 1)(m_2 + 1) \cdots (m_r + 1)$$

个因数。由于 $r \geq 1$，我们有 $N > 1$，所以 1 和 N 是两个不同的因数。剔除它们之后，真因数的个数是

$$(m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_r+1)-2.$$

验证：$12 = 2^2 \cdot 3$ 给出 $3 \cdot 2 - 2 = 4$，而 $16 = 2^4$ 给出 $5 - 2 = 3$。

使 N 尽量小的原则

在两部分中，我们都先固定指数，再问这些指数所容许的最小 N 是多少。以下两点观察便可解决这个问题。

- 使用最小的质数。假如用了某个质数 q，却没有用一个较小的质数 p，那么把 q 换成 p 后，每个指数都保持不变，因数个数也就不变，而 N 却变小了。所以所用的质数应该是 $2, 3, 5, \ldots$，中间不留空缺。
- 把最大的指数放在最小的质数上。设 $p < q$，其中 p 的指数是 a，q 的指数是 b，而 $a < b$。把两个指数对调，相当于把 N 乘以 $p^{b-a}/q^{b-a} < 1$，而因数个数不变。

因此，对于指数 $e_1 \geq e_2 \geq \cdots \geq e_r$，最小的 N 是 $2^{e_1}3^{e_2}5^{e_3}\cdots$。

第 (i) 部分

我们需要刚好 12 个真因数，所以 $d(N) = 14$。每个因子 $m_i + 1$ 至少是 2，而 $14 = 2 \cdot 7$，其中 7 是质数。所以把 14 写成若干个至少为 2 的因子之积，只有两种方法：

- 14 本身：$N = p^{13}$，最小为 $2^{13} = 8192$；
- 7×2：$N = p^6 q$，最小为 $2^6 \cdot 3 = 192$。

所以刚好有 12 个真因数的最小正整数是

$$\boxed{192 = 2^6 \cdot 3}.$$

它的因数是 $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 64, 96, 192$，共有 14 个。

第 (ii) 部分

现在我们需要 $d(N) \geq 14$。由于 $d(N)$ 不再是固定的，我们按相异质数的个数 r 来分类。把指数由大至小排列，$e_1 \geq e_2 \geq \cdots$。

> ? **想一想** 为甚么不能直接沿用第 (i) 部分，只考虑 $d(N) = 14$ 的情况?

因为因数较多，并不代表 N 一定较大。把指数分散到几个小质数上，只需很小的代价就能得到很多因数。例如，$2^3 \cdot 3 \cdot 5$ 有 $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ 个因数，却比 192 小得多。所以我们必须考虑每一个 $d(N) \geq 14$ 的值。

- $r \geq 4$：这时 $N \geq 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$。
- $r = 3$：这时 $d(N) = (e_1+1)(e_2+1)(e_3+1) \geq 14$。若 $e_2 = e_3 = 1$，则需要 $4(e_1+1) \geq 14$，所以 $e_1 \geq 3$，而 $N \geq 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$。否则 $e_2 \geq 2$，于是 $e_1 \geq 2$，而 $N \geq 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$。
- $r = 2$：这时 $(e_1+1)(e_2+1) \geq 14$，其中 $e_1 \geq e_2$。若 $e_2 = 1$，则 $e_1 \geq 6$，而 $N \geq 2^6 \cdot 3 = 192$。若 $e_2 = 2$，则由 $3(e_1+1) \geq 14$ 得 $e_1 \geq 4$，所以 $N \geq 2^4 \cdot 3^2 = 144$。若 $e_2 \geq 3$，则 $e_1 \geq 3$，而 $N \geq 2^3 \cdot 3^3 = 216$。
- $r = 1$：$e_1 + 1 \geq 14$，所以 $N \geq 2^{13} = 8192$。

每种情况都给出 $N \geq 120$，而 $N = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ 确实符合要求：它有 $4 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 14$ 个真因数。所以最少有 12 个真因数的最小正整数是

$$\boxed{120},$$

而它其实有 14 个真因数。

验算

以穷举法逐一数出由 2 至 9000 每个 N 的真因数个数，结果与公式 $d(N) - 2$ 吻合。穷举亦证实 192 是第一个刚好有 12 个真因数的 N，而 120 是第一个最少有 12 个真因数的数（它有 14 个）。若想用手快速核对，可留意略小于 120 而因数众多的数，即 $60, 72, 84, 90, 96$ 和 108，全都有 12 个因数，因此只有 10 个真因数。

常见错误

- 设 $d(N) = 12$ 而不是 14。要记得 1 和 N 并不计算在内。
- 第 (ii) 部分也答 192。最少有 12 个真因数的最小 N，不一定刚好有 12 个。
- 把大指数放在大质数上：$2 \cdot 3^6$ 的因数个数与 $2^6 \cdot 3$ 相同，但数值大得多。

STEP 之外

因数函数（divisor function）$d(N)$ 具有*积性*（multiplicative）：只要 a 与 b 互质（coprime），就有 $d(ab) = d(a)d(b)$。这正是上述乘积公式所表达的。因数个数比所有较小的数都多的数，称为*高度合成数*（highly composite number），拉马努金（Ramanujan）曾对它们作过深入研究。120 就是其中之一，而本题所用的指数排序论证，正是他的分析的起点。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 是一本介绍因数函数和唯一分解的精彩入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。