详细解答

STEP II 1996，第 5 题

纯数学 · 单位根

STEP II 1996，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s2-q5

关键思路

这个四次方程是回文（palindromic）的：它的系数由前往后读和由后往前读都一样。除以 z^2 之后，各项可归并为 z^2+z^{-2} 和 $z+z^{-1}$ 两组，而两者都可以用 $u=z+z^{-1}$ 表示，于是 z 的四次方程（quartic）便化为 u 的二次方程（quadratic）。题目的后半部分，是要认出这个四次式正是从 z^5-1 抽出因式 $z-1$ 后余下的因式，所以它的根是五次单位根（fifth roots of unity）；把同样四个数的两种描述互相比较，便得到三角函数的精确值。

解答

u 的值

由于 $z=0$ 不满足 $(*)$，我们可以除以 z^2：

$$z^2+z+1+z^{-1}+z^{-2}=0.$$

现在 $u^2=(z+z^{-1})^2=z^2+2+z^{-2}$，所以 $z^2+z^{-2}=u^2-2$。方程变成

$$u^2-2+u+1=0, \qquad \text{即} \qquad u^2+u-1=0,$$

所以

$$u=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{或} \quad u=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

z 的值

由 $z+z^{-1}=u$ 得 $z^2-uz+1=0$，所以

$$z=\frac{u\pm\sqrt{u^2-4}}{2}.$$

利用 $u^2 = 1 - u$，判别式（discriminant）为 $u^2 - 4 = -3 - u$，它对 u 的两个值都是负数（因为两种情况下都有 $|u| < 2$），所以根都不是实数：

$$z = \frac{u \pm i\sqrt{3+u}}{2}.$$

当 $u = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 时，$3 + u = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$；当 $u = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 时，$3 + u = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$。写成 $\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}$，则 $(*)$ 的四个解为

$$z = \frac{-1+\sqrt{5} \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \qquad \text{和} \qquad z = \frac{-1-\sqrt{5} \pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

u 的每个值给出 z 的两个值（一对 z, z^{-1}，在这里它们互为共轭复数（complex conjugates）），而四次方程恰好有四个根，所以这些就是全部的根。

与 $z^5 = 1$ 的关系

展开得

$$(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = z^5 - 1,$$

因为中间各项逐一对消。所以若 z 满足 $(*)$，则第二个因式为零，从而 $z^5 - 1 = 0$。

$z^5 = 1$ 的解是 $z = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$，其中 $k = 0, 1, 2, 3, 4$。$k = 0$ 给出 $z = 1$，它并不满足 $(*)$（左边等于 5）。其余四个解互不相同，而且全部满足 $(*)$，因为对它们而言 $z - 1 \neq 0$，所以因式 $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ 必须为零。因此 $(*)$ 的解是

$$z = \cos\theta + i\sin\theta, \qquad r = 1, \quad \theta = \pm\frac{2\pi}{5}, \pm\frac{4\pi}{5}.$$

推导结果

现在我们有同样四个数的两种描述，必须把它们逐一配对。

> ? **想一想** 四个根式（surd）表达式之中，哪一个是 $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$？

看正负号。由于 $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$，$\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$ 这个数的实部和虚部都是正数。在各个根式表达式之中，实部分别是 $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} > 0$ 和 $\frac{-1-\sqrt{5}}{4} < 0$，所以恰好只有一个位于第一象限：

$$\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\,\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

（在 $(0, \pi)$ 内的另一个角，即 $\frac{4\pi}{5}$，其余弦为负数，所以它与另一个虚部为正的根配对。）比较实部和虚部，

$$\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \qquad \text{和} \qquad \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$

这正是所要求的结果。顺带可得 $\cos\frac{4\pi}{5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ 和 $\sin\frac{4\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$。

验算

- $\cos\frac{2\pi}{5} = \cos 72^\circ \approx 0.30902$，而 $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \approx 0.30902$；$\sin 72^\circ \approx 0.95106$，而 $\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \approx 0.95106$。
- 四个根之和应为 -1（即 z^3 的系数的相反数）：各实部相加得 $\frac{2(-1+\sqrt{5})+2(-1-\sqrt{5})}{4} = -1$。换句话说，$u$ 的两个值之和为 -1。
- 每个根的模（modulus）应为 1：例如 $\frac{(-1+\sqrt{5})^2+(10+2\sqrt{5})}{16} = \frac{16}{16} = 1$。

我们已用数值方法验证：四个根式表达式全部满足 $(*)$ 和 $z^5 = 1$，并且与 $e^{\pm 2\pi i/5}$, $e^{\pm 4\pi i/5}$ 相符。

常见错误

- 忘记排除 $z = 1$：它满足 $z^5 = 1$ 但不满足 $(*)$，所以 $(*)$ 有四个根，而不是五个。
- 毫无理据地把根式与角配对。正是实部的正负号，确定了哪一个根是 $\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$。
- 写成 $z^2 + z^{-2} = u^2$ 而漏掉了 -2。

STEP 之外

代换 $u = z + z^{-1}$ 可以把任何回文多项式的次数减半。只需解二次方程便能求得 $\cos\frac{2\pi}{5}$，这绝非偶然：高斯（Gauss）证明了，$\cos\frac{2\pi}{n}$ 能够单用平方根写出，当且仅当正 n 边形可以用尺规作图（ruler and compass construction）作出，而本题正是正五边形作图背后的代数。完整的来龙去脉属于伽罗瓦理论（Galois theory），会在大学二年级的代数课程中学到；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《复分析：可视化方法》）从几何角度展示了单位根优美的一面。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。