详细解答

STEP II 1996，第 4 题

纯数学 · 代换积分法

> **STEP II 1996，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q4

关键思路

看到平方根 $\sqrt{1+x}$ 和 $\sqrt{1-x}$，最自然的做法就是代入 $x=\cos t$，因为半角公式（half-angle formulae）可把 $1\pm\cos t$ 化为完全平方。根号消去之后，和式 $\cos\theta+\sin\theta$ 可合并成单一个余弦，整个分母于是变成 $1+\cos$(某个角)，这又是一个完全平方。最后一次代换（substitution）把积分区间重新置中，使分子变成 $\cos 4u$，这正是题目要先证明该恒等式（identity）的原因。

解答

恒等式

两次运用 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$，并设 $c=\cos u$：

$$\begin{aligned}\cos 4u &= 2\cos^2 2u - 1 = 2\left(2c^2-1\right)^2 - 1\\ &= 2\left(4c^4-4c^2+1\right) - 1 = 8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1,\end{aligned}$$

得证。

第一次代换

设 $x=\cos t$，则 $\mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t$。当 x 由 -1 变到 1 时，t 由 π 递减至 0；负号正好把上下限对调回来，得

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{1+\cos t}+\sqrt{1-\cos t}+2}\,\mathrm{d}t.$$

现在 $1+\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2}$，而 $1-\cos t = 2\sin^2\frac{t}{2}$。

想一想 $\sqrt{2\cos^2\frac{t}{2}}$ 真的等于 $\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$，而不是 $\sqrt{2}\left|\cos\frac{t}{2}\right|$ 吗?

一般而言应取绝对值（modulus），但这里 $0 \le t \le \pi$，所以 $0 \le \frac{t}{2} \le \frac{\pi}{2}$，$\cos\frac{t}{2}$ 和 $\sin\frac{t}{2}$ 皆为非负。这正是选取 $t \in [0, \pi]$（而不是例如 $[-\pi, 0]$）的关键所在。因此

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\cos t}+\sqrt{1-\cos t} &= \sqrt{2}\left(\cos\tfrac{t}{2}+\sin\tfrac{t}{2}\right)\\ &= 2\left(\cos\tfrac{t}{2}\cos\tfrac{\pi}{4}+\sin\tfrac{t}{2}\sin\tfrac{\pi}{4}\right) = 2\cos\left(\tfrac{t}{2}-\tfrac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

设 $v = \frac{t}{4} - \frac{\pi}{8}$，使得 $\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4} = 2v$，则分母为

$$2 + 2\cos 2v = 2(1+\cos 2v) = 4\cos^2 v = 4\cos^2\left(\tfrac{t}{4}-\tfrac{\pi}{8}\right),$$

所以

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{4\cos^2\left(\frac{t}{4}-\frac{\pi}{8}\right)}\,\mathrm{d}t,$$

得证。

第二次代换

设 $u = \frac{t}{4} - \frac{\pi}{8}$，则 $t = 4u + \frac{\pi}{2}$，$\mathrm{d}t = 4\,\mathrm{d}u$。上下限 $t = 0$ 和 $t = \pi$ 分别变成 $u = -\frac{\pi}{8}$ 和 $u = \frac{\pi}{8}$。分子为

$$\sin t = \sin\left(4u + \tfrac{\pi}{2}\right) = \cos 4u,$$

开首的恒等式正好在这里派上用场。于是

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{\cos 4u}{4\cos^2 u}\cdot 4\,\mathrm{d}u = \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{8\cos^4 u - 8\cos^2 u + 1}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \left(8\cos^2 u - 8 + \sec^2 u\right)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

除以 $\cos^2 u$ 并无问题，因为在这个区间上 $\cos u \ge \cos\frac{\pi}{8} > 0$。利用 $8\cos^2 u = 4 + 4\cos 2u$，被积函数（integrand）为 $4\cos 2u - 4 + \sec^2 u$，所以

$$I = \Big[\,2\sin 2u - 4u + \tan u\,\Big]_{-\pi/8}^{\pi/8}.$$

方括号内是 u 的奇函数（odd function），所以其值等于它在 $\frac{\pi}{8}$ 处取值的两倍：

$$\begin{aligned}I &= 2\left(2\sin\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{\pi}{2} + \tan\tfrac{\pi}{8}\right) = 2\left(\sqrt{2} - \tfrac{\pi}{2} + \sqrt{2} - 1\right)\\ &= 4\sqrt{2} - \pi - 2,\end{aligned}$$

其中用到 $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 以及题目给出的 $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$。这就是所求的结果。

验算

- 数值上，$4\sqrt{2}-\pi-2\approx 0.51526$。把辛普森法则（Simpson's rule）分别应用于原来关于 x 的积分、关于 t 的积分和关于 u 的积分，结果都是 0.515262。
- 大小检查：在 $[-1,1]$ 上，和式 $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}$ 介乎 $\sqrt{2}$（在 $x=\pm 1$ 处）与 2（在 $x=0$ 处）之间，所以被积函数介乎 $\frac{1}{4}$ 与 $\frac{1}{2+\sqrt{2}}\approx 0.293$ 之间。因此 $0.5\leq I\leq 0.586$，而 0.515 与此相符。
- 在 $t=0$ 处，分母 $4\cos^2(-\frac{\pi}{8})$ 应等于 $\sqrt{2}+0+2$；果然 $4\cos^2\frac{\pi}{8}=2(1+\cos\frac{\pi}{4})=2+\sqrt{2}$。

常见错误

- 漏掉 $\mathrm{d}x=-\sin t\,\mathrm{d}t$ 中的负号，或忘记对调上下限，结果得出 $-I$。
- 写下 $\sqrt{1+\cos t}=\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$，却没有指出在 $[0,\pi]$ 上 $\cos\frac{t}{2}\geq 0$。
- 漏掉 $\mathrm{d}t=4\,\mathrm{d}u$ 中的因子 4；它刚好与分母的 4 互相抵消。

STEP 之外

像 $x=\cos t$ 这类把平方根“有理化”的代换，其实是一个普遍事实的特例：若被积函数是 x 与 $\sqrt{1-x^2}$（或类似的二次根式）的有理函数（rational function），就总可以通过三角代换或 $t=\tan\frac{\theta}{2}$ 代换把它化为有理函数，然后以初等函数（elementary functions）表示其积分。到了大学，你会学到这套方法的系统版本，也会见到它的局限：遇上三次或四次根式时，便会得出椭圆积分（elliptic integrals），而这些积分并非初等。想做更多这种风格的题目，可参考 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。