详细解答

STEP II 1996，第 3 题

纯数学 · 以数学归纳法证明斐波那契恒等式

> **STEP II 1996，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q3

关键思路

这里的一切都源自递推关系（recurrence），所以归纳法（induction）是最自然的工具。对于乘积 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$，窍门是比较相邻的两个值：用一次递推关系，每个值就变成前一个值的相反数。至于加法公式（addition formula），巧妙的做法是对 k 作归纳，同时让归纳假设（induction hypothesis）对每一个 n 一并成立，这样我们就可以用 $n+1$ 代替 n 来应用它。

解答

最初几项的值

在 $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ 中取 $n = 1, 2, 3$：

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1, \qquad F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2, \qquad F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3,$$

正如题目所求。继续算下去，

$$F_5 = 3 + 2 = 5, \qquad F_6 = 5 + 3 = 8, \qquad F_7 = 8 + 5 = 13.$$

乘积 $F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$

对 $n \geq 1$，记 $C_n = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2$。由数值表可得：

n	1	2	3	4	5	6
$F_{n+1}F_{n-1}$	$1 \cdot 0$	$2 \cdot 1$	$3 \cdot 1$	$5 \cdot 2$	$8 \cdot 3$	$13 \cdot 5$
F_n^2	1	1	4	9	25	64
C_n	-1	1	-1	1	-1	1

这些值正负交替，所以我们猜想

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \text{对所有} n \geq 1.$$

想一想 只用递推关系，怎样才能由 C_n 得到 C_{n+1}?

把 C_{n+1} 中下标较大的一项展开。对 $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 \\ &= (F_{n+1} + F_n)F_n - F_{n+1}^2 && \text{(递推关系用于} F_{n+2}) \\ &= F_n^2 - F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) \\ &= F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} && \text{(因为} F_{n+1} - F_n = F_{n-1}\text{，其中} n \geq 1) \\ &= -C_n. \end{aligned}$$

这样一来，归纳法便水到渠成。基础步骤（base case）是 $C_1 = F_2F_0 - F_1^2 = 0 - 1 = -1 = (-1)^1$。若对某个 $n \geq 1$ 有 $C_n = (-1)^n$，则 $C_{n+1} = -C_n = (-1)^{n+1}$。因此由归纳法可得

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \qquad \text{对每一个} n \geq 1.$$

加法公式

对每个正整数 k，设 $P(k)$ 为以下命题：

$$F_{n+k} = F_kF_{n+1} + F_{k-1}F_n \qquad \text{对所有正整数} n.$$

基础步骤 $k = 1$。右边是 $F_1F_{n+1} + F_0F_n = 1 \cdot F_{n+1} + 0 = F_{n+1}$，正是左边。所以 $P(1)$ 成立。

归纳步骤（*inductive step*）。假设 $P(k)$ 对某个 $k \geq 1$ 成立，并设 n 为任意正整数。

想一想 归纳假设说的是 F_{n+k}，但我们需要的是 F_{n+k+1}。应该把哪一个 n 代进去?

由于 $P(k)$ 对每一个正整数都成立，而 $(n+1)+k = n+(k+1)$，我们可以用 $n+1$ 代替 n 来应用它：

$$\begin{aligned} F_{n+(k+1)} = F_{(n+1)+k} &= F_kF_{n+2} + F_{k-1}F_{n+1} && \text{(由} P(k)\text{，取} n+1) \\ &= F_k(F_{n+1} + F_n) + F_{k-1}F_{n+1} && \text{(递推关系用于} F_{n+2}) \\ &= (F_k + F_{k-1})F_{n+1} + F_kF_n \\ &= F_{k+1}F_{n+1} + F_kF_n && \text{(递推关系，因} k \geq 1). \end{aligned}$$

对这个 n 而言，这正是 $P(k+1)$，而 n 是任意的。所以由归纳法，$P(k)$ 对每一个正整数 k 都成立，即

$$F_{n+k} = F_k F_{n+1} + F_{k-1} F_n \qquad \text{对所有正整数} n, k,$$

正如题目所求。

（另一个做法是固定 n，对 k 作两步归纳：先验证 $k=1$ 和 $k=2$，再把 $k-1$ 和 k 的公式相加。两条路都可行；上面的做法只需要一个基础步骤。）

验算

- 卡西尼（Cassini）恒等式，取 $n=6$：$F_7F_5 - F_6^2 = 13\cdot 5 - 64 = 1 = (-1)^6$。
- 加法公式，取 $n=3$、$k=4$：$F_7 = 13$，而 $F_4F_4 + F_3F_3 = 9+4 = 13$。
- 取 $k=n$ 可得 $F_{2n} = F_n(F_{n+1} + F_{n-1})$；当 $n=3$ 时，这就是 $F_6 = 2\cdot(3+1) = 8$。

电脑已验证乘积公式对 $1 \le n < 150$ 成立，以及加法公式对所有 $1 \le n, k < 90$ 成立。

常见错误

- 把正负号弄反：$C_1 = -1$，所以答案是 $(-1)^n$，而不是 $(-1)^{n+1}$。
- 在加法公式中，固定 n 对 k 作归纳，却又在 $n+1$ 处使用归纳假设：只有当归纳假设是对所有 n 陈述时，这样做才合理。
- 使用 $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$ 时，没有指出它需要 $n \ge 1$。

STEP 之外

这两个恒等式都是同一个矩阵（matrix）事实的投影：$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$。取行列式（determinant）便立即得到乘积公式（卡西尼恒等式，Cassini's identity），而写出 $M^{n+k} = M^k M^n$ 则得到加法公式。卡西尼恒等式还说明相邻的两个斐波那契数（Fibonacci numbers）互质（coprime），再配合加法公式，更可以证明一个令人惊叹的结果：$\gcd(F_m, F_n) = F_{\gcd(m,n)}$。Davenport 的 *The Higher Arithmetic* 是探索这类数论的好去处，而 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra* 则通过特征值（eigenvalues）来处理斐波那契数。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。