详细解答

STEP II 1996，第 2 题

纯数学 · 非线性联立方程

STEP II 1996，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s2-q2

关键思路

这组方程对 x、y、z 而言并非线性，但每一项都只是三个乘积 yz、zx、xy 其中之一。把这三个乘积当作未知数，方程组便化为三条线性（linear）方程，可以用消元法（elimination）求解。把三个乘积相乘便得 $(xyz)^2$，再把 xyz 逐一除以各个乘积，就能还原出每个变量。

解答

伪装起来的线性方程组

设

$$a = yz, \qquad b = zx, \qquad c = xy.$$

于是三条方程变成

$$2a + b - 5c = 2, \tag{1}$$

$$a - b + 2c = 1, \tag{2}$$

$$a - 2b + 6c = 3. \tag{3}$$

由 (2) 得 $a = 1 + b - 2c$。代入 (1)：

$$2(1 + b - 2c) + b - 5c = 2 \quad \Longrightarrow \quad 3b - 9c = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 3c.$$

代入 (3)：

$$(1 + b - 2c) - 2b + 6c = 3 \quad \Longrightarrow \quad -b + 4c = 2.$$

连同 $b = 3c$ 可得 $c = 2$，所以 $b = 6$，$a = 1 + 6 - 4 = 3$。系数矩阵（coefficient matrix）的行列式（determinant）为 $-3 \neq 0$，因此这是该线性方程组的唯一解：

$$yz = 3, \qquad zx = 6, \qquad xy = 2.$$

证明 $xyz = \pm 6$

把三个乘积相乘，

$$(yz)(zx)(xy) = x^2y^2z^2 = (xyz)^2 = 3 \times 6 \times 2 = 36,$$

所以 $xyz = 6$ 或 $xyz = -6$，正如题目所求。

? **想一想** 现在我们已知 xyz，以及 yz、zx、xy 各自的值。怎样才能单独求出 x?

三个乘积全都不是零，所以 x、y、z 全都不是零，我们可以放心相除：

$$x = \frac{xyz}{yz}, \qquad y = \frac{xyz}{zx}, \qquad z = \frac{xyz}{xy}.$$

可能的取值

若 $xyz = 6$，则 $x = 6/3 = 2$，$y = 6/6 = 1$，$z = 6/2 = 3$。

若 $xyz = -6$，则 $x = -2$，$y = -1$，$z = -3$。

以上每一步都是必然的结果，所以只有这两组候选解；两者都满足原来的方程（方程只涉及两个变量的乘积，所以把三个变量同时变号，方程保持不变）。因此

$$(x, y, z) = (2, 1, 3) \quad \text{或} \quad (x, y, z) = (-2, -1, -3).$$

验算

代入 $(2, 1, 3)$：$yz = 3$，$zx = 6$，$xy = 2$，所以三条方程的左方分别是 $6 + 6 - 10 = 2$、$3 - 6 + 4 = 1$ 和 $3 - 12 + 12 = 3$。三者全部吻合。用电脑搜索所有由分数 p/q（其中 $|p| \leq 12$，$1 \leq q \leq 4$）组成的三元组，结果恰好找到上述两组解；精确运算亦确认该线性方程组有唯一解 $(a, b, c) = (3, 6, 2)$。

常见错误

- 由 $(xyz)^2 = 36$ 出发，对每个变量各自开方，例如把 $x = \pm 2$、$y = \pm 1$、$z = \pm 3$ 当作互不相干地写出来。这样会得到八个三元组，但只有两个成立：三个正负号是互相牵连的，因为 xyz 只有一个正负号。

► 遗漏负根，只给出 $(2, 1, 3)$。

STEP 之外

把棘手的式子重新命名，令非线性问题变成线性问题，这个技巧随处可见：由取对数来拟合 $y = Ae^{kx}$ 这类曲线，到用代换法解微分方程（differential equation），都是同一道理。方程组一旦成为线性，矩阵和行列式便能立即告诉你解是否唯一，而这正是线性代数（linear algebra）入门课程的起点。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）正是本着这种精神讲解消元法和行列式。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。