详细解答

STEP II 1996，第 13 题

概率与统计 · 网格上的随机漫步

STEP II 1996，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s2-q13

关键思路

这条恒等式就是范德蒙恒等式（Vandermonde's identity）：比较等号两边 t^n 的系数（coefficient）即可。至于步行的问题，有用的是一个每走一步都恰好改变一的数量：你身处的位置在我的酒店以北多少个街段，加上以西多少个街段。我每走一步，它就增加 1；我的朋友每走一步，它就减少 1。因此我们只可能在某一个时刻、在某一条由路口组成的对角线上相遇，而相遇的概率（probability）正好就是恒等式中的那个和。

解答

恒等式

$(1+t)^n$ 中 t^r 的系数是 $\binom{n}{r}$。乘积 $(1+t)^n(1+t)^n$ 中含 t^n 的项，来自在第一个因式中选 t^r，并在第二个因式中选 t^{n-r}，其中 $r = 0, 1, \ldots, n$。所以左边 t^n 的系数是

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r}\binom{n}{n-r},$$

而右边的是 $\binom{2n}{n}$。令两者相等，便得到所求的恒等式。把同样的论证用于 $(1+t)^a(1+t)^b = (1+t)^{a+b}$，可得更一般的版本

$$\sum_{r} \binom{a}{r}\binom{b}{n-r} = \binom{a+b}{n}, \qquad (*)$$

稍后我们会用到它。

我们可以在哪里相遇

把我的酒店放在原点，以街段为单位，x 向东量度，y 向北量度，于是我朋友的酒店位于 $(-n, n)$。对任何位置定义

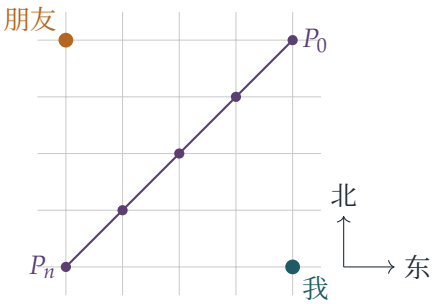
$$D = y - x,$$

即该位置在我的酒店以北的街段数加上以西的街段数。向北走或向西走会使 D 增加 1；向南走或向东走则使它减少 1。所以步行了 t 分钟之后，我有 $D = t$，而我的朋友从 $D = 2n$ 出发，有 $D = 2n - t$。这在每一瞬间都成立，包括走到街段中途的时候，因为 D 随着我们步行而均匀地变化。

要在同一时间身处同一地点，我们的 D 值必须相等，所以 $t = 2n - t$，得出 $t = n$。因此我们只可能在恰好 n 分钟之后相遇，而且是在一个满足 $y - x = n$ 的路口。我走的 n 步使我留在区域 $-n \le x \le 0$、$0 \le y \le n$ 之内，所以可能的相遇点是

$$P_r = (-r, n - r), \qquad r = 0, 1, \ldots, n,$$

也就是正方形对角线上的 $n + 1$ 个路口，这条对角线连接我的酒店以北 n 个街段的路口与以西 n 个街段的路口。（特别地，我们永远不可能在街段中途擦身而过。）



上图所示为 $n = 4$ 的情况：相遇点就是对角线上的圆点。

相遇的概率

n 分钟后我位于 P_r，当且仅当我的 n 步之中有 r 步向西、$n - r$ 步向北。每一个由 n 步组成的序列，概率都是 2^{-n}，所以

$$\mathrm{P}(\text{我在}P_r) = \binom{n}{r}\frac{1}{2^n}.$$

我的朋友从 $(-n, n)$ 出发，走 n 步后到达 $P_r = (-r, n - r)$，当且仅当其中 $n - r$ 步向东、r 步向南，其概率为 $\binom{n}{n-r}2^{-n}$。我们两人的步行互相独立（independent），而对不同的 r，“我们两人都在 P_r”这些事件是互斥（mutually exclusive）的，所以

$$\mathrm{P}(\text{相遇}) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\binom{n}{n-r}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n},$$

这里用了上述恒等式。

迟 $2k$ 分钟出发

现在由我朋友出发的一刻起计算时间 T。当 $T \geq 2k$ 时，我已步行了 $T-2k$ 分钟，所以我有 $D = T-2k$，而我的朋友有 $D = 2n-T$。两者只在 $T = n+k$ 时相等。这时我走了 $n-k$ 步（这里 $k \leq n$，所以这是一个非负整数），而我的朋友走了 $n+k$ 步。由于 $n+k \geq 2k$，我的朋友不可能趁我还在酒店里熟睡时走到对角线靠我这一边。同样，我们只可能在路口相遇，绝不会在街段中途相遇。

走了 $n-k$ 步之后，若其中 r 步向西，我便位于 $(-r, n-k-r)$，其概率为 $\binom{n-k}{r}2^{-(n-k)}$。我的朋友位于同一点，当且仅当她的 $n+k$ 步之中有 $n-r$ 步向东、$k+r$ 步向南，其概率为 $\binom{n+k}{n-r}2^{-(n+k)}$。像之前一样对 r 求和，

$$\mathrm{P}(\text{相遇}) = \frac{1}{2^{n-k}\,2^{n+k}} \sum_{r=0}^{n-k} \binom{n-k}{r}\binom{n+k}{n-r} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n},$$

这里用了 $(*)$，其中 $a = n-k$ 及 $b = n+k$。

想一想 为甚么睡过头竟然完全没有影响?

从我朋友的角度看这次步行，量度我相对于她的位置。她的每一步（向南或向东）和我的每一步（向北或向西），都使我相对于她向北移动一个街段或向西移动一个街段，两者的概率各为 $\frac{1}{2}$，而且互相独立。起初我们在两个方向上各相距 n 个街段，而我们相遇，当且仅当合共 $2n$ 步（我的加上她的）恰好由 n 次“向北”和 n 次“向西”的相对移动组成。哪一步由谁来走并不重要，所以无论这 $2n$ 步怎样分配，是 n 和 n，还是 $n-k$ 和 $n+k$，答案都是 $\binom{2n}{n}/2^{2n}$。关于 k 的条件只是确保我真的能走完自己那一份。当 n 很大时，这个概率约为 $1/\sqrt{\pi n}$，数值很小，而且无论我有没有睡过头偶数分钟，它都一样。

$n = 1$，迟一分钟

现在我有 $D = T-1$，而我的朋友有 $D = 2-T$，两者只在 $T = \frac{3}{2}$ 时相等，那时我们两人都正走到街段的中点。所以我们永远不可能在同一时间身处同一个路口；如果相遇是指在路口相遇，概率就是 0。奇偶性（parity）改变了：总步数现在是奇数。

如果把在街段中途擦身而过也算作相遇（两个真实的人自然会这样算），那么当我们沿同一个街段相向而行时，便会在 $T = \frac{3}{2}$ 相遇。在 $T = 1$ 时，我仍在我的酒店 $(0,0)$，而我的朋友在 $(0,1)$ 或 $(-1,0)$。之后我们会相遇的情况是：她在 $(0,1)$ 并向南走而我向北走，或者她在 $(-1,0)$ 并向东走而我向西走。每种情况的概率都是 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$，所以

$$\mathrm{P}(\text{在街段中途相遇}) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{1}{4}.$$

验算

- 当 $n = 1$ 而没有延误时，若我向北走而她向东走，或我向西走而她向南走，我们便会相遇：概率为 $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \binom{2}{1}/4$。
- 我们用电脑对 $n \leq 5$ 及所有容许的 k 列举了每一对步行路线，每半分钟追踪两人的位置一次。不论延误多少个偶数分钟，相遇的概率都是 $\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}, \frac{35}{128}, \frac{63}{256}$，而且相遇总是发生在所预测的那一个时刻。当 $n = 1$ 而延误一分钟时，仅有的相遇都是在 $T = \frac{3}{2}$ 于街段中途发生，总概率为 $\frac{1}{4}$。
- 当 $n = 100$ 时，$\binom{200}{100}/4^{100} \approx 0.0563$，与 $1/\sqrt{100\pi} \approx 0.0564$ 十分接近。

常见错误

- 以为我们可以在任何时间于正方形内任何地方相遇。数量 $y - x$ 把相遇限定在一个时刻和一条对角线上。
- 只把概率平方而没有对各个相遇点求和，或者忘记了我朋友到达 P_r 所需的步数是对调的（她需要向东走 $n - r$ 步，而不是 r 步）。

STEP 之外

相对位置的论证是一种耦合（coupling）：两个独立的随机漫步（random walk）被一个长度为两者之和的漫步取代，这就是 $\binom{2n}{n}/4^n$ 不断重现的原因。同一个数量也是直线上的简单对称随机漫步在 $2n$ 步之后回到原点的概率，而它按 $1/\sqrt{\pi n}$ 衰减（由斯特灵公式（Stirling's formula）得出），正是波利亚（Pólya）定理的关键：该定理指出，一维和二维的这类漫步会以概率 1 返回起点。Grimmett 与 Welsh 合著的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）讨论了随机漫步和这些返回概率。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。