详细解答

STEP II 1996，第 11 题

力学 · 简谐运动

STEP II 1996，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s2-q11

关键思路

以弦线的伸长量为研究对象，它其实就是质点相对于升降机的位置。在地面参考系（ground frame）中写出质点的牛顿第二定律（Newton's second law），再减去升降机的已知加速度：剩下的就是绕着一个移位后的中心进行的简谐运动（simple harmonic motion，简称 SHM）。只要伸长量保持为正，弦线就一直拉紧，而简谐运动的解正好告诉你伸长量最低可以去到多少。当升降机停止加速时，只有振动的中心会移动；质点相对于升降机的位置和速度都原封不动地延续下去，由此便可求出新的振幅（amplitude）。

解答

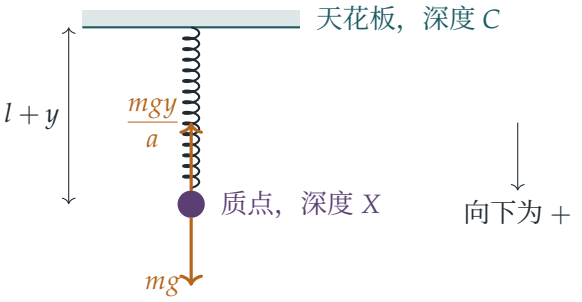
我们把质点的质量设为 m，并把弦线当作轻质弹性弦线，其弹性模量（modulus）为 λ，在拉紧时服从胡克定律（Hooke's law）。全题之中，y 表示弦线长度超出其自然长度 l 的量，所以开始时 $y = a$。只有这样理解，才与题目给出的微分方程（differential equation）吻合。假如 y 是由原来的平衡长度 $l + a$ 量起，右边便会是 $-f$。

运动方程

在最初的平衡状态中，张力（tension）$\lambda a/l$ 与重量平衡，所以

$$\frac{\lambda a}{l} = mg \quad \Longrightarrow \quad \frac{\lambda}{l} = \frac{mg}{a},$$

而当伸长量为 $y > 0$ 时，张力为 mgy/a。



从固定于地面的一点起，向下量度深度：天花板位于深度 C，质点位于深度 X，所以 $X-C=l+y$。升降机以加速度 f 下降，所以 $\ddot{C}=f$。在弦线拉紧时，对质点沿铅垂方向（以向下为正）分解力，得

$$m\ddot{X}=mg-\frac{mgy}{a}.$$

由于 $y=X-C-l$，我们有 $\ddot{y}=\ddot{X}-\ddot{C}=\ddot{X}-f$，因此

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{a}y=g-f,$$

这正是所要证明的。

弦线保持拉紧；振幅为 af/g

设 $\omega^2=g/a$。常数特解（particular solution）为 $y=(g-f)/\omega^2=a(g-f)/g$，所以通解（general solution）为

$$y=a-\frac{af}{g}+A\cos\omega t+B\sin\omega t.$$

在 $t=0$ 时，质点处于原来的平衡位置，并随升降机一起运动，所以 $y(0)=a$ 及 $\dot{y}(0)=0$。由此得 $A=af/g$ 及 $B=0$：

$$y=a-\frac{af}{g}+\frac{af}{g}\cos\omega t.$$

这是以 $y=a-af/g$ 为中心、振幅为 af/g 的简谐运动。质点相对于升降机的位置是 $l+y$，所以质点相对于升降机以振幅 af/g 振动。

? **想一想** 我们用了胡克定律，而它假设弦线是拉紧的。这不是循环论证吗？

不是。我们先假设弦线拉紧然后求解，再检查所得的解从未离开该假设成立的范围。y 的最小值是

$$y_{\min}=a-\frac{2af}{g}=a\left(1-\frac{2f}{g}\right)>0,$$

因为 $f<g/2$。所以 y 保持为正，弦线一直拉紧，这个解前后一致。条件 $f<g/2$ 正是在这里派上用场。

升降机停止加速之后

当 $t > T$ 时，我们有 $\ddot{C} = 0$，同样的论证给出

$$\ddot{y} + \omega^2 y = g,$$

这是以 $y = a$（即自然的平衡伸长量）为中心的简谐运动。设 $z = y - a$，则 $\ddot{z} + \omega^2 z = 0$。

> **想一想** 这段新运动的初始条件是甚么？

升降机的加速度在 $t = T$ 时突变，但它的速度 $\dot{C}$ 不会突变，质点的位置和速度也不会。所以 $y = X - C - l$ 和 $\dot{y} = \dot{X} - \dot{C}$ 在 $t = T$ 时是连续的。由第一阶段可知，在 $t = T$ 时，

$$z = \frac{af}{g}(\cos\omega T - 1), \qquad \dot{z} = -\frac{af}{g}\,\omega \sin\omega T.$$

对于简谐运动 $\ddot{z} = -\omega^2 z$，振幅 R 在任何时刻都满足 $R^2 = z^2 + \dot{z}^2/\omega^2$（这就是能量守恒（energy conservation），或者说是把恒等式 $\cos^2 + \sin^2 = 1$ 应用于 $z = R\cos(\omega t + \varepsilon)$）。因此

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{a^2 f^2}{g^2}\left[(1 - \cos\omega T)^2 + \sin^2\omega T\right] \\ &= \frac{a^2 f^2}{g^2}\,(2 - 2\cos\omega T) \\ &= \frac{a^2 f^2}{g^2}\cdot 4\sin^2\tfrac{1}{2}\omega T, \end{aligned}$$

其中用了 $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$。所以新的振幅是

$$R = \frac{2af}{g}\,|\sin\tfrac{1}{2}\omega T|,$$

这正是所要证明的。

弦线始终不会松弛：现在的最小伸长量是

$$a - R \;\geq\; a - \frac{2af}{g} = a\left(1 - \frac{2f}{g}\right) > 0,$$

同样是因为 $f < g/2$。所以 $y > 0$ 自始至终成立，运动方程一直有效。

验算

- 若 T 是周期的整数倍，即 $\omega T = 2k\pi$，则在升降机停止加速的一刻，质点刚好回到 $y = a$，并相对于升降机静止。公式给出的振幅为 0：质点静止悬挂着，理应如此。
- 若 ωT 是 π 的奇数倍，质点位于最高点 $y = a - 2af/g$，并相对于升降机瞬时静止。新的中心是 $y = a$，所以振幅为 $2af/g$，正是公式的最大值。

- 在数值上，我们对随机选取的 a、$f < g/2$ 和 T，在地面参考系中逐步计算整个运动（包括升降机和质点，并在弦线松弛时把张力关掉）。例如，当 $a = 0.546$、$f/g = 0.337$ 及 $\omega T = 15.27$ 时，算出的振幅为 0.18380 和 0.35864，与 af/g 和 $\frac{2af}{g}|\sin\frac{1}{2}\omega T|$ 吻合至六位有效数字，而伸长量从未低于 $a - 2af/g$。

常见错误

- 由原来的平衡长度 $l + a$ 量度 y。这样右边便会是 $-f$，而不是 $g - f$。
- 在第二阶段重新开始时取 $\dot{y} = 0$。在 $t = T$ 时，质点一般正相对于升降机运动，而这个速度对振幅是有贡献的。
- 弄错 f 的正负号。升降机向下加速，会把有效重力减至 $g - f$，所以振动的中心会上升。

STEP 之外

减去升降机的加速度，等同于在加速参考系（accelerating frame）中考虑问题：在这个参考系里，均匀加速度 f 的作用就像一个额外的重力场 $-f$。这个想法引出惯性力（fictitious forces），最终通往爱因斯坦（Einstein）的等效原理（equivalence principle）。第二阶段是振子受阶跃式变化的力驱动的一个简单例子。它的响应取决于阶跃发生在振动的哪个时刻，而处理这类问题的一般工具是格林函数（Green's functions），亦即杜哈梅原理（Duhamel's principle）。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）正是以这种观点处理非惯性参考系（non-inertial frames）和振子。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。