详细解答

STEP II 1996，第 10 题

力学 · 由旋转轮抛出的抛体

> **STEP II 1996，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/96-s2-q10

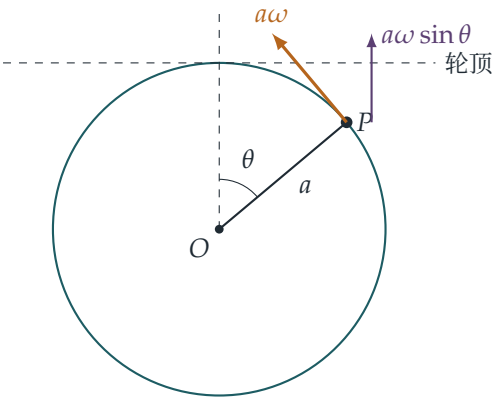
关键思路

在松手的一刻，女主角就成为一个抛体（projectile），其初始位置和初速度完全取决于她当时在轮上的位置。高度只与竖直方向的运动有关，所以她所能到达的最大高度，等于松手时的高度，加上速度的竖直分量为她额外换来的高度。这样，高度便是单一个松手角度的函数，而问题就变成：这个函数在甚么情况下可以超越轮顶？它的最大值又是多少？

解答

建立模型

把女主角视为随轮缘运动的质点（particle），并忽略空气阻力。设 O 为轮的中心，并假设她在点 P 松手，其中 OP 与竖直向上方向的夹角为 θ，$0 \le \theta \le \pi$。她在轮缘上的速率为 $a\omega$，方向沿 P 点的切线（tangent）。



P 点的切线垂直于 OP，所以它与水平方向的夹角为 θ。如果她松手时正朝着轮顶运动，她的速度的向上分量为 $a\omega\sin\theta$（图中以紫红色标示）。如果她正在远离轮顶，她的竖直速度向下或为零，因此她永远不会升到高于松手点的位置，而松手点不会高于轮顶；这些松手情况可以不予考虑。

松手时她在 O 之上的高度为 $a\cos\theta$。在只受重力作用的情况下，她的竖直速度由 $a\omega\sin\theta$ 减至零，根据 $v^2 = u^2 - 2gs$，她会再上升 $(a\omega\sin\theta)^2/(2g)$。所以她在轮顶之上所能到达的最大高度为

$$H(\theta) = a\cos\theta + \frac{a^2\omega^2\sin^2\theta}{2g} - a.$$

设 $c = \cos\theta \in [-1,1]$ 及 $k = \dfrac{a\omega^2}{2g}$。那么 $\sin^2\theta = 1 - c^2$，而

$$\begin{aligned}\frac{H}{a} &= c - 1 + k(1-c^2)\\ &= (1-c)[k(1+c)-1].\end{aligned}$$

求 ω_0

当 $c = 1$（在轮顶松手）时，$H = 0$，正如所料。当 $c < 1$ 时，因子 $1-c$ 为正，所以 $H > 0$ 当且仅当 $k(1+c) > 1$。

> **想一想** 在 c 的容许取值范围内，$k(1+c)$ 最大可以有多大?

由于 $c < 1$，$k(1+c)$ 可取 $[0, 2k)$ 内的每一个值，但永远达不到 $2k$。所以：

- 若 $2k > 1$，我们可以选取足够接近 1 的 $c < 1$，使得 $k(1+c) > 1$，她便能升到轮顶之上；
- 若 $2k \le 1$，则对每一个 $c < 1$ 都有 $k(1+c) < 2k \le 1$，所以在每一个松手点都有 $H \le 0$，她永远无法升到轮顶之上。

条件 $2k \le 1$ 即 $a\omega^2 \le g$。注意边界情况 $\omega^2 = g/a$ 属于“不可能”的一方，所以这样的 ω 的最大值存在，并且是

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

（这也是另一个情况下的临界角速度（angular speed）：假如有一个质点靠在轮的外侧并位于轮顶，它在这个角速度下便会刚好脱离接触，因为向心加速度（centripetal acceleration）$a\omega^2$ 等于 g。）

$\omega > \omega_0$ 时的最大高度

现在 $2k = a\omega^2/g = \omega^2/\omega_0^2 > 1$。作为 c 的函数，

$$\frac{H}{a} = -kc^2 + c + k - 1$$

是一个开口向下的二次函数（quadratic），在其导数（derivative）$1 - 2kc$ 为零之处取得最大值，即

$$c = \frac{1}{2k} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}.$$

这个值严格介乎 0 与 1 之间，所以它是一个容许的松手点（在轮顶稍前的位置），并且给出整个 $[-1, 1]$ 上的最大值。代入后得

$$\frac{H_{\max}}{a} = -\frac{1}{4k} + \frac{1}{2k} + k - 1 = k - 1 + \frac{1}{4k}.$$

由于 $k = \frac{1}{2}\omega^2/\omega_0^2$，因而 $\frac{1}{4k} = \frac{1}{2}\omega_0^2/\omega^2$，

$$H_{\max} = \frac{a}{2}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 2 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = \frac{a}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2,$$

这正是所求的结果。她只要在 $\cos\theta = \omega_0^2/\omega^2$ 之处、正朝着轮顶运动时松手，便可达到这个高度。

验算

- 当 $\omega = \omega_0$ 时，公式给出 0，与边界情况吻合；而当 ω 很大时，它的增长有如 $a\omega^2/(2\omega_0^2) = a^2\omega^2/(2g)$，这正是一个质点从 O 的水平位置以速率 $a\omega$ 竖直上抛所能到达的高度。事实上，当 ω 很大时，最佳的松手位置接近 $\theta = \frac{\pi}{2}$，该处的速度是竖直的。
- 单位：ω/ω_0 是无量纲（dimensionless）的，所以 $H_{\max}$ 是一个长度。
- 数值上，取 $a = 2\,\mathrm{m}$ 及 $\omega = 2\omega_0$，公式给出 $\frac{a}{2}\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 = 2.25\,\mathrm{m}$。由松手点 $\cos\theta = \frac{1}{4}$ 开始逐步计算抛体的运动，会得到相同的数值；而搜索所有松手角度后，亦确认没有其他松手位置能做得更好。

常见错误

- 从轮的中心而非轮顶量度高度：H 中的 $-a$ 是不可或缺的。
- 以为最佳的松手位置是 $\theta = \frac{\pi}{2}$，即她的速度为竖直之处。这样做只是令额外上升的高度最大，而不是令总高度最大。
- 忘记检查最佳的 $c = \omega_0^2/\omega^2$ 是否确实位于 $[-1, 1]$ 之内。

STEP 之外

这里所用的方法，即把一个量写成单一控制变量的函数然后求最优值，是最优控制（optimal control）问题的最简单形式。与之十分相近的是轨迹的包络线（envelope of trajectories，即“安全抛物线”）：从轮上各个松手点出发所能到达的所有点的边界，你可以用同一类判别式（discriminant）论证把它求出来。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）以大学一年级的程度阐述抛体运动和转动。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。