详细解答

STEP II 1996，第 1 题

纯数学 · 二项式级数的系数

STEP II 1996，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/96-s2-q1

关键思路

三个括号相乘后，某一项的系数（coefficient）等于一个总和：从每个括号各选一项，使各项的幂次加起来等于目标幂次，再把所有这样的选法加起来。在 (i) 中，这意味著要小心整理一个有限的计数。在 (ii) 中，系数 $1, -2, 3, -4, \ldots$ 可以认出是 $(1+x)^{-2}$ 的系数，而括号内多出来的项，正好足以令截断在 x^6 处不产生任何影响。

解答

第 (i) 部分

把括号写成 $P(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k$，其中

$$a_k = (-1)^k (k+1), \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

从三个因式中分别选出 $a_p x^p$、$a_q x^q$、$a_r x^r$，当且仅当 $p+q+r = 6$ 时才会对 x^6 有贡献，所以我们要求的系数是

$$\sum_{\substack{p+q+r=6 \\ 0 \le p,q,r \le 4}} a_p a_q a_r.$$

每一项的符号都是 $(-1)^{p+q+r} = (-1)^6 = +1$，因此可以不理会符号，只需把乘积 $(p+1)(q+1)(r+1)$ 加起来。

想一想 怎样才能确保没有遗漏任何一种指数的选法，也没有重复计算？

先列出所有总和为 6、且每个数都不超过 4 的无序三元组 $\{p, q, r\}$，然后乘以从三个（可区分的）括号中取出这些指数的次序数目：若三个数各不相同，有 6 种次序；若恰好有

两个相等，有 3 种；若三个都相等，则只有 1 种。

指数	乘积 $(p+1)(q+1)(r+1)$	次序数目	贡献
$4,2,0$	$5\cdot 3\cdot 1=15$	6	90
$4,1,1$	$5\cdot 2\cdot 2=20$	3	60
$3,3,0$	$4\cdot 4\cdot 1=16$	3	48
$3,2,1$	$4\cdot 3\cdot 2=24$	6	144
$2,2,2$	$3\cdot 3\cdot 3=27$	1	27

以上已包括所有可能：最大的数只能是 4、3 或 2（不可能更小，因为 $3\times 1<6$；也不可能超过 4），而对于每个最大的数，我们已列出把余下部分拆成两个较小部分的所有方法。相加得

$$90+60+48+144+27=369,$$

所以 x^6 的系数是 $\boxed{369}$。

第 (ii) 部分

现在括号是 $Q(x)=\sum_{k=0}^{6}(-1)^k(k+1)x^k$。二项展开式（binomial expansion）在 $|x|<1$ 时成立，给出

$$(1+x)^{-2}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-2}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)x^k,$$

这是因为 $\binom{-2}{k}=\frac{(-2)(-3)\cdots(-k-1)}{k!}=(-1)^k(k+1)$。所以 $Q(x)$ 就是 $(1+x)^{-2}$ 的展开式在 x^6 项之后截断的结果：

$$(1+x)^{-2}=Q(x)+x^7R(x)$$

其中 $R(x)$ 是某个幂级数（power series）。

想一想 为甚么缺少了的尾段 $x^7R(x)$ 不会影响立方中 x^6 的系数?

取立方，得

$$(1+x)^{-6}=Q(x)^3+3Q(x)^2\,x^7R(x)+3Q(x)\,x^{14}R(x)^2+x^{21}R(x)^3.$$

第一项之后的每一项都是 x^7 乘以一个幂级数，所以不含任何低于 x^7 的 x 的幂。因此 $Q(x)^3$ 中 x^6 的系数等于 $(1+x)^{-6}$ 中 x^6 的系数。（换个说法：指数加起来等于 6 的乘积，绝不可能用到任何一个因式中次数为 7 或以上的项。）

再用一次二项展开式，

$$\binom{-6}{6}=\frac{(-6)(-7)(-8)(-9)(-10)(-11)}{6!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{720}=\binom{11}{5}=462.$$

所以 $Q(x)^3$ 中 x^6 的系数是 $\boxed{462}$。

验算

第 (ii) 部分可以独立地验证第 (i) 部分。两个括号的分别只在于 $-6x^5$ 和 $7x^6$ 这两项，所以 $462-369$ 应该等于所有用到其中一项的贡献的总和。用到 $7x^6$ 的项，必须从另外两个括号各取 1：有 3 个位置，每个给出 7，合共 21。用到 $-6x^5$ 的项，必须从另外两个括号取 $-2x$ 和 1：有 $3\times 2=6$ 种排法，每种给出 $(-6)(-2)(1)=12$，合共 72。果然 $21+72=93=462-369$。用电脑把立方直接乘开，亦得出 369 和 462。

常见错误

- 忘记计算次序：指数 $4,2,0$ 可以用 6 种方式从三个括号中取得，而不是 1 种。
- 在第 (i) 部分把含有 5 或 6 的三元组也计算在内，但该括号只到 x^4 为止。
- 逐项担心符号：由于指数的和总是 6，每一个贡献都是正数。

STEP 之外

(ii) 中的论证是*形式幂级数*（formal power series）理论的起点：级数可以逐个系数相乘，完全不必考虑收敛（convergence）问题，而乘积中 x^n 的系数只取决于每个因式中直至 x^n 为止的各项。以这种方式通过生成函数（generating function）来处理数列，是一种强大的计数工具；例如，$(1-x)^{-m}$ 中 x^n 的系数，就是把 n 写成 m 个非负整数的有序和的方法数目。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 进阶题解）收录了更多这类展开式的 STEP 式练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。